UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Unidad didáctica para aproximar a los estudiantes de grado noveno al significado de los números reales, sus operaciones y propiedades utilizando dos tipos de representación (las construcciones con regla y compás y las expansiones decimales)

Jorge Eliécer Jerez Villamizar

Facultad de Ciencias
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2016

Unidad didáctica para aproximar a los estudiantes de grado noveno al significado de los números reales, sus operaciones y propiedades utilizando dos tipos de representación (las construcciones con regla y compás y las expansiones decimales)

Jorge Eliécer Jerez Villamizar

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Doctor, Herbert Dueñas Ruiz

Facultad de Ciencias
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2016

Dedicatoria

Dedicado a Sonia Constanza por su paciencia y cariño
en los momentos felices y sobre todo en los difíciles
y a Jacobo para quien espero ser un ejemplo a seguir.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional de Colombia, que me apoyó para poder realizar los estudios de maestría.

Al profesor Herbert Dueñas director de este trabajo de grado por sus aportes, dedicación y tiempo para la realización de este trabajo final.

A la profesora Clara Helena Sánchez por sus aportes y dedicación para finalizar este trabajo.

A mi familia que siempre me brindó apoyo y colaboración para generar los espacios necesarios para poder realizar los estudios de la Maestría en Enseñanza de la Ciencias.

A mis estudiantes por su disposición y compromiso.

Resumen

En este trabajo se presenta una unidad didáctica cuyo objetivo es aproximar a los estudiantes de grado noveno al concepto de número real, sus propiedades y operaciones, utilizando las construcciones con regla y compás y las expansiones decimales. Inicialmente se analizan tres artículos en los que se exponen algunas dificultades al abordar el conjunto de los números reales. Posteriormente, se hace un recorrido de los aspectos históricos y epistemológicos que permitieron formalizar este conjunto numérico, presentando los aspectos disciplinares a la par con el desarrollo histórico. Finalmente, se presentan los aspectos didácticos para estructurar la unidad, planteando los objetivos de trabajo, los recursos y materiales utilizados, la metodología y la evaluación, seguida de la secuencia de actividades en contexto, para las cuales se presentan reflexiones relacionadas con la implementación en aula.

Palabras clave: *Números reales, construcciones con la regla y el compás, expansiones decimales y unidad didáctica*

Abstract

This paper has the aim of presenting a didactic unit. It introduces the 9^{th} grade students to the concept of real numbers set, their operations and properties by using procedures through ruler and compass and decimal expansions. First three articles are presented. They refer to students difficulties when working with the real numbers set. Then a historical and epistemological journey is made as the basis of this numerical set formalization, defining the disciplinary aspects in parallel to it. Finally, didactic aspects are proposed in order to structure the unit: objectives, resources and materials used, methodology and assessment process including teacher's reflection about its classroom application.

Keywords: *Real numbers, procedures through ruler and compass, decimal expansions y didactic unit*

Tabla de contenido

Página

Dedicatoria III

Agradecimientos IV

Resumen V

Abstract V

Tabla de contenido VI

Índice de figuras IX

Índice de tablas XI

1. Introducción 1

2. Antecedentes 4
- 2.1. Los números reales según Cantor y Dedekind. Una Propuesta Didáctica . . . 4
- 2.2. Concepciones escolares de los decimales 5
- 2.3. Representación de los números reales en la recta 6

3. Descripción del problema 7

4. Aspectos históricos, epistemológicos y disciplinares 10
- 4.1. El concepto de número en Grecia 11
  - 4.1.1. El número asociado a la magnitud de segmentos 11
  - 4.1.2. Los segmentos conmensurables 13
  - 4.1.3. La irracionalidad de $\sqrt{2}$ 15
  - 4.1.4. Construcciones con regla y compás y los problemas clásicos 16
- 4.2. El concepto de número en el desarollo del álgebra 19
  - 4.2.1. El álgebra en India 20
  - 4.2.2. El álgebra en Europa 21
  - 4.2.3. Representaciones con la regla y el compás 23

4.2.4. Operaciones con segmentos utilizando regla y compás 23
4.3. La formalización de $\mathbb{R}$, los trabajos de Cantor y Dedekind 31
4.3.1. El trabajo de Richard Dedekind 32
4.3.2. El trabajo de Georg Cantor 37
4.4. Definición axiomática de los números reales 43
4.4.1. Axiomas algebraicos 44
4.4.2. Axiomas de orden 49
4.4.3. Axioma de completitud 52
4.5. Representaciones de los números reales 53
4.5.1. El grupo de las construcciones con la regla y el compás (Los números constructibles) 53
4.6. Expansión decimal de un número real 55
4.6.1. Aproximación a la representación de un número real utilizando su expansión decimal 57
4.7. Conclusiones del capítulo 58

5. Aspectos didácticos 60
5.1. La transposición didáctica 60
5.2. La Competencia en matemáticas y la competencia matemática 61
5.3. El currículo de matemáticas 62

6. Unidad Didáctica 66
6.1. Introducción 66
6.2. Descripción del problema 66
6.3. Descripción del contexto de unidad didáctica 67
6.4. Objetivos 68
6.4.1. Objetivo general 69
6.4.2. Objetivos específicos 69
6.5. Materiales y Recursos 69
6.6. Metodología 69
6.7. La evaluación 70
6.7.1. Escala de valoración 71
6.8. Secuencia de actividades 72
6.8.1. La prueba diagnóstica 72
6.9. Descripción de actividades 81
6.9.1. Actividad 1. Las razones y números racionales 81
6.9.2. Actividad 2. Introducción de los números irracionales 87
6.9.3. Actividad 3. La notación científica 93
6.9.4. Prueba de salida 97

Conclusiones finales 100

7. Sugerencias **102**

Sugerencias **102**

Anexos **103**

A. Errores presentados por los estudiantes en la prueba diagnóstica **104**

B. Guías de la unidad didáctica **108**
B.1. Prueba diagnóstica 108
B.2. Actividad 1 112
B.3. Actividad 2 114
B.4. Actividad 3 115
B.5. Prueba de salida 116

C. Elementos de una clase **117**

Bibliografía **119**

Índice de figuras

4.1. Adición por repretición de puntos. 12
4.2. Adición por repetición de segmentos 13
4.3. Comparar segmentos 13
4.4. Determinar el segmento de mayor medida que mide a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. 14
4.5. Inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ 15
4.6. Construcción del triángulo equilátero. 18
4.7. Duplicación del cubo 19
4.8. Punto de referencia 22
4.9. Unidad de medida en la recta. 22
4.10. Adición de segmentos. 23
4.11. Sustracción de segmentos. 24
4.12. Multiplicación de segmentos. 25
4.13. División de segmentos. 26
4.14. Raíz cuadrada de la multiplicación de dos segmentos. 28
4.15. Operaciones de multiplicación y división entre segmentos 30
4.16. Operación de raíz cuadrada entre segmentos. 30
4.17. Introducción al trabajo de Dedekind. 32
4.18. Partición de la recta l en dos conjuntos. 33
4.19. Encaje de intervalos. 40
4.20. Intervalos que encierran a $\sqrt{3}$ 41
4.21. Conjunto Solución de la inecuación $5 \cdot x + 8 < 10$. 52
4.22. Recta numérica. 56
4.23. Segunda expansión decimal de $\frac{1}{3}$ 58
4.24. Tercera expansión decimal de $\frac{1}{3}$ 58

5.1. Transposición didáctica. 61
5.2. Sistema de representación geométrico. 64
5.3. Sistema de representación gráfico. 65

6.1. Copo de nieve de Koch. 74
6.2. Formación del cloruro de amonio NH_4Cl. 82
6.3. Espiral de Fibonacci. 89
6.4. Subdivisión de las medidas de las aristas del cubo. 94

A.1. Errores de representación en la recta numérica 1. 104
A.2. Errores de representación en la recta numérica 2. 105
A.3. Estudiante que confunde los conjuntos numéricos. 105
A.4. Estudiante que no diferencia los límites de los conjuntos numéricos. 106
A.5. Estudiante que incurrió en error con el manejo de los signos. 106
A.6. Estudiante que da respuesta sin realizar procedimiento. 107

Índice de tablas

4.1. Posibles representaciones de la unidad y número de acuerdo con la concepción en Grecia. 12

6.1. Escala de valoración para el desempeño de los estudiantes. 71
6.2. Enunciados Prueba diagnóstica: Sesión 1. 74
6.3. Enunciados Prueba diagnóstica: Sesión 2. 75
6.4. Secuencia de actividades. 81
6.5. Cambio de representación de número decimal a racional. 85
6.6. Actividad No. 1 División de un segmento en potencias de dos. 86
6.7. Actividad No. 2 Representación del problema de población de conejos (sucesión de Fibonacci). 89
6.8. Actividad No. 2 La espiral de Pitágoras. 91

Capítulo 1

Introducción

Para que la humanidad llegara a formalizar el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, se tuvo que recorrer un camino que duró alrededor de veinte siglos y en el transcurso de este tiempo el concepto de número y su representación se tuvieron que revaluar en más de una oportunidad. Ejemplo de ello son el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, las cuales hacen replantear el trabajo desarrollado en Grecia; la necesidad de caracterizar las cantidades negativas que aparecieron en el desarrollo del Álgebra o la introducción de un sistema de referencia (Descartes), con el que la ubicación de un número en la recta numérica adquiere una condición relativa. Todos estos aspectos históricos en muchas ocasiones se dejan de lado en el aula de clase, para privilegiar la presentación de $\mathbb{R}$ de manera axiomática. Una representación en la que los números son entes completamente abstractos y que un estudiante de educación básica y media en muchas ocasiones no alcanza a comprender. Este aspecto trae como consecuencia que los estudiantes incurran en errores al realizar las operaciones y que las propiedades se reciten de memoria.

De acuerdo con las dificultades observadas por los estudiantes y que fueron mencionadas anteriormente, surge el interrogante, ¿cuáles son los elementos que debe tener una unidad didáctica que permita a los estudiantes de grado noveno aproximarse al conjunto de los números reales, sus operaciones y propiedades? Con el propósito de dar solución al interrogante planteado, se propuso como objetivo general de este trabajo diseñar una unidad didáctica para estudiantes de grado noveno que permita aproximarse al significado de los números reales y sus operaciones, por medio del análisis de dos de sus representaciones, decimal y geométrica (recta numérica) utilizando la regla y el compás. El diseño, implementación y ajuste de las actividades de la unidad didáctica se desarrolló con un grupo de estudiantes de grado noveno del Instituto Pedagógico Arturo Ramírez Montúfar (IPARM) de la Universidad Nacional de Colombia.

En relación con la enseñanza y el aprendizaje de los números reales se tiene que los estudiantes de grado noveno incurren en errores asociados con sus operaciones y propiedades. Por ello en el capítulo 2, llamado Antecedentes, se presenta un resumen de tres artículos que permiten identificar diferentes estrategias de enseñanza y que aportan a la construcción de la unidad didáctica propuesta en este trabajo. En el capítulo 3 se hace una descripción del problema a partir de las actuaciones de los estudiantes al realizar operaciones con números reales y de aspectos propios de la Institución.

En el capítulo 4 se abordan los aspectos históricos y epistemológicos a la par con los aspectos disciplinares del conjunto de los números reales. Para su fundamentación se hizo una revisión bibliográfica, en la que se consultaron libros de historia de la matemática como *Introducción a la filosofía y a la historia de la matemática* [4] y *Epistemología de la matemática Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica* [33]; Libros de texto como *Cálculo I* [14] e *Introducción al análisis matemático* [24] y [29] y memorias de encuentros de matemática como *Razonamiento griego con regla y compás* [7], entre otros. El desarrollo del capítulo se inicia a partir del concepto de número en Grecia y finaliza con la formalización del conjunto de los números reales a partir de las propuestas de R. Dedekind (cortaduras) y G. Cantor (encaje de intervalos y sucesiones fundamentales) y la presentación axiomática dada por D. Hilbert a comienzos del siglo XX. Los aspectos disciplinares relativos a las construcciones con regla y compás como el conjunto de los números constructibles, el cual tiene estructura algebraica de cuerpo, y que resulta ser insuficiente para representar todo $\mathbb{R}$, se presentan al final del capítulo, con lo que se evidencia la necesidad de complementar este tipo de representación de $\mathbb{R}$ con otro tipo de representación, la expansión decimal de un número real, con la cual se puede aproximar todo número real a partir de números decimales.

Con el propósito de estructurar la unidad didáctica se abordan en el capítulo 5 los aspectos didácticos, específicamente la transposición didáctica, la diferencia entre la competencia matemática y la competencia en matemática propuesta por D'Amore et al. (2008) y el análisis del currículo de matemáticas desde la propuesta de Estándares Básicos de Competencias del MEN (2006).

En el capítulo 6 se presentan los objetivos, materiales y recursos empleados, la metodología, la evaluación y la secuencia de actividades que conforman la unidad didáctica, en las que se busca a partir de situaciones en contexto abordar las temáticas relacionadas con este trabajo. El nombre y propósito de cada actividad se presenta a continuación.

1. La prueba diagnóstica.

2. Las razones y números racionales. La actividad se introduce a partir de una aplicación de las razones presente en la Química con la ley de Graham.

3. La introducción a los números irracionales. Esta temática se aborda con la sucesión de Fibonacci y la convergencia al número ϕ y su construcción con la regla y el compás.

4. La notación científica. A partir de la adaptación de una situación de nanotencnología se introducen las expansiones decimales de un número real.

5. Prueba de salida. Se da cierre a la unidad didáctica con una evaluación final, en la que se espera que los estudiantes presenten mejores resultados, en comparación con los obtenidos en la prueba diagnóstica la cual está dividida en dos sesiones de trabajo, una centrada en ejercicios rutinarios y otra, con situaciones en contexto.

Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo, sugerencias y anexos. En este apartado se presentan errores en los que incurrieron los estudiantes en la prueba diagnóstica y que ratifican lo expuesto en la descripción del problema, los enunciados de las diferentes actividades y los elementos para las clases de la unidad didáctica.

Capítulo 2

Antecedentes

La enseñanza y el aprendizaje de los números reales han sido objeto de un gran número de investigaciones. Se toman tres de ellas como el punto de partida para generar esta propuesta de unidad didáctica. La primera de ellas es una propuesta didáctica para la enseñanza de los números reales a partir de la construcción formal hecha por Cantor y Dedekind. La segunda, es un artículo que presenta algunas concepciones que tienen los estudiantes en relación con los números decimales, derivadas de la presentación que hacen de los libros de texto, y cómo estas concepciones les pueden generar obstáculos al abordar el conjunto de los números reales. Por último, se aborda un artículo que estudia la biyección existente entre los números reales y la recta (geométrica) y la contrasta con la manera como se presenta a los estudiantes, resaltando que se omiten aspectos disciplinares, epistemológicos y educativos, pertinentes.

2.1. Los números reales según Cantor y Dedekind. Una Propuesta Didáctica

En Sanabria (2005) el autor propone abordar el conjunto de los números reales a partir de una construcción acorde con el desarrollo histórico y hace uso de la representación decimal para aproximarse al concepto. Inicialmente el autor parte de una reflexión en torno a cómo los profesores y los libros de texto presentan $\mathbb{R}$ a los estudiantes en la escuela. Esta presentación trata la imposibilidad de $\mathbb{Q}$ para solucionar ecuaciones como $x^2 - 2 = 0$, mostrando que $\mathbb{R}$ permite darle solución y afirma que esta presentación por parte de los libros de texto es poco novedosa y no muestra con claridad la continuidad de $\mathbb{R}$, debido a que las soluciones de dichas ecuaciones son números algebraicos, por lo que se dejan de lado los números reales que son trascendentes e identifica que el problema de esta presentación se genera en la noosfera[1] del sistema educativo, que es en la que se genera "el saber enseñar".

La propuesta de trabajo de Sanabria (2005) inicia desde la reflexión acerca de cómo Can-

[1] [...]La noosfera es por tanto "la capa exterior que contiene todas las personas que en la sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza", [18].

tor y Dedekind realizaron la construcción formal de $\mathbb{R}$ y propone que se debe presentar a los estudiantes el concepto de número real a partir de los que él denomina un "detector" que sirve para caracterizar los números reales como clases de equivalencia, dando como ejemplo que al presentar a los estudiantes el número $\sqrt{2}$ como la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1, ésta carece de sentido, pues no es algo que en la cotidianeidad se utilice, ya que un carpintero que necesite medir la diagonal de una mesa cuadrada de 1 m de lado puede decir que dicho número es 1,42 y con esta aproximación es suficiente para solucionar el problema y advierte que esta concepción dista mucho de lo que realmente es el número $\sqrt{2}$. Propone entonces que se debe llevar al estudiante a que se aproxime a $\sqrt{2}$ por medio de los números decimales e intente solucionar la pregunta ¿Cuál es el número que al elevarlo al cuadrado da como resultado 2?

2.2. Concepciones escolares de los decimales

En Gómez (2010) el autor presenta algunas interpretaciones que construyen los estudiantes acerca de los números decimales, a partir del análisis de los contextos que utilizan los libros de texto para presentarlos. Dentro de los contextos que identifica están la numeración, la medida, las fracciones decimales y la ampliación de los campos numéricos.

Como resultado de dicha presentación, los números decimales admiten diferentes significados que influyen en la comprensión por parte del estudiante. Para esto, el autor inicia realizando una analogía entre los decimales y las escultura de piedra, desde lo que él denomina "concepciones petrificadas" y que se refiere a la masificación que recibieron los decimales por estar asociados a un sistema de medida. Luego describe el contexto sobre el cual se enmarca la enseñanza de lo decimales y algunas consecuencias educativas que se tienen. A continuación, se presentan los contextos propuestos:

- Contexto numeración: los números decimales aparecen como una extensión del sistema posicional de los números naturales, y su uso es para la solución de situaciones específicas. Bajo esta mirada, la enseñanza de los números decimales se limita a extender las reglas de la numeración decimal, incorporar la coma decimal y ampliar el papel del cero.
- Contexto de medición: los números decimales se construyen a partir de la expresión numérica de cantidades en términos de unidades y subunidades de medida en el sistema métrico decimal. Bajo esta mirada la enseñanza de los números decimales se trata de una manera de reescribir números naturales que están ligados a una unidad de medida (no se pueden desligar) de diferente orden a un sólo número con una sola unidad de medida. Como ejemplo de esto se tiene que 1 m y 15 cm se expresa como 1,15 m.
- Contexto de fracciones decimales: los números decimales aparecen como una nueva forma de escribir las fracciones (cambio de representación). Bajo esta mirada, al enseñar

los números decimales éstos no son un objeto matemático nuevo para el estudiante, simplemente son otra manera de escribir las fracciones. Como $0,5$ es una nueva manera de escribir la fracción $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$.

- Contexto de ampliación de los campos numéricos: los decimales se enseñan como idea intuitiva de número real. Para los números racionales se tienen decimales finitos y decimales periódicos infinitos y para los números irracionales se tienen los decimales no periódicos infinitos. Bajo esta mirada, los números decimales admiten diferentes contextos y situaciones.

2.3. Representación de los números reales en la recta

Coriat y Scaglia (2000) hacen énfasis en la problemática que se origina al realizar la asociación entre los números reales y los puntos de la recta, en la que en ocasiones se omiten aspectos disciplinares, epistemológicos y educativos. Para esto, se basan en las concepciones de Cantor y Dedekind en relación con la continuidad de la recta geométrica, la cual debe ser expresada como un axioma. Por otra parte, se presenta la manera en la que en una recta se puede determinar el punto correspondiente a un número dado, utilizando los instrumentos como la regla y el compás. Inicialmente se deben ubicar sobre ella el 1 y el 0 y a través de las operaciones de adición, multiplicación, división y raices cuadradas de segmentos se obtienen los números naturales, racionales y una buena muestra de irracionales. Este resultado es siempre una aproximación y corresponde a los números constructibles, los cuales son un subcuerpo de $\mathbb{R}$. Sin embargo, se resalta que existen números reales que no se pueden construir con estos instrumentos como $\sqrt[3]{2}$, por lo que se debe recurrir a otro tipo de procedimientos y representaciones como su expresión decimal.

Finalmente, los autores hacen una presentación de las diferencias entre sistemas de representación de $\mathbb{R}$ como por ejemplo $\frac{1}{2}, \sqrt{2}$ y $0,333...$, y su relación con la ubicación de puntos en la recta numérica, en la que se pone de manifiesto que si no se conocen correctamente los símbolos que intervienen, se pueden generar dificultades cuando se abordan situaciones de orden.

Capítulo 3

Descripción del problema

Se ha observado que la enseñanza de los números reales en grado noveno se limita a presentarlos como entes abstractos, en particular se presentan en términos conjuntistas como la unión entre el conjunto de los números racionales y el de los números irracionales, cuya representación esta dada por la expresión:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

En esta presentación se exponen los demás conjuntos numéricos (naturales, enteros y racionales) como subconjuntos de $\mathbb{R}$. En ese orden de ideas, en los grados anteriores a noveno en la asignatura de matemáticas, los estudiantes han hecho un recorrido por los conjuntos numéricos como una secuencia que se inicia con los números naturales en el ciclo de los grados cuarto y quinto. Luego, en el ciclo de grado sexto y séptimo, se abordan los números enteros y racionales. Finalmente en el ciclo de los grados octavo y noveno se introducen los números reales, para luego abordar las operaciones y sus propiedades de una manera axiomática, lo cual en algunos casos no favorece la comprensión del significado de este conjunto numérico, sus operaciones y propiedades. Debido a las dificultades heredadas de los conjuntos numéricos precedentes los estudiantes incurren en errores al realizar operaciones con números reales, que están asociadas al correcto uso de las diferentes formas de representación.

Por ejemplo, en las operaciones $\frac{2}{3} - 0,\overline{3}$ y $\sqrt{5} + \sqrt{6}$ propuestas generalmente por el profesor en el aula para el desarrollo de la clase, se tiene que:

Para la primera operación, los estudiantes incurren en el error de expresar el número $0,\overline{3}$ como el racional $\frac{3}{10}$ para luego realizar la operación entre racionales. Este error evidencia que no se ha comprendido correctamente el cambio de representación (decimal a fracción) de los números propuestos. Para la segunda operación, los estudiantes incurren en el error de operar como si fueran números naturales determinando erróneamente que el resultado de la operación es $\sqrt{5} + \sqrt{6} = \sqrt{11}$; este error está asociado a la representación decimal de un número irracional.

Por otra parte, se tiene que la presentación que hace el profesor de los números reales como $\pi, 2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}$, entre otros, está basada en una representación numérica [34] que se constituye como "estándar" para el trabajo en matemáticas, por lo que en muchas ocasiones no se utiliza otro tipo de representación.

De estas situaciones se evidencian dificultades con respecto al concepto de número que tienen los estudiantes, específicamente en relación con las formas de representación de los números racionales e irracionales, aspecto que contribuye a que no den un correcto significado a las operaciones y sus propiedades, especialmente en $\mathbb{R}$.

Por otra parte, los resultados de la Prueba Saber 9^o evidencian que en el trabajo que se realiza en la asignatura de matemáticas se está dando énfasis a los conceptos relacionados con el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, centrándose específicamente en el trabajo con los algoritmos de las operaciones y se está trabajando con menor sistematicidad y sin articular los otros pensamientos (espacial, métrico, aleatorio y variacional) y sus respectivos sistemas (geométrico, de medida, de datos y, algebraicos y analíticos)[2]. Razón por la cual, el área de matemáticas del Instituto Arturo Ramírez Montúfar platea una reestructuración del plan de estudios.

Esta reestructuración busca que se articulen al menos dos tipos de pensamiento con el propósito de promover una mejor comprensión de los conceptos por parte de los estudiantes y en la que uno de sus componentes es el énfasis en el significado de los conceptos y estructuras que se abordan en cada nivel como se propone en los Estándares Básicos de Competencias (2006).

Una de las preguntas que se genera luego de establecer las dificultades anteriormente mencionadas es ¿Qué características debe tener una unidad didáctica para los estudiantes de grado noveno que permita aproximarlos al significado de los números reales, sus operaciones y propiedades?

Para responder a este interrogante las actividades que integrarán la unidad estarán enfocadas en el trabajo de dos formas de representación de los números reales. La primera, las expansiones decimales y la segunda, la recta numérica, usando las construcciones con regla y compás con el propósito de visualizar la representación de algunos números reales y sus operaciones.

Para fundamentar esta propuesta se hace una revisión del concepto y significado de número real desde una perspectiva histórica, epistemológica y disciplinar, y didáctica, para luego centrarse en su representación en la recta numérica, a partir del uso de las construcciones con la regla y el compás y mostrando que no todos los números reales se pueden representar

[2]En Colombia, el Ministerio de Educación propone el trabajo en matemáticas en los niveles de educación básica y media en estos cinco tipos de pensamiento y sus respectivos sistemas [26]

de esta manera, por lo que es necesario abordar el significado de los números irracionales no constructibles desde otro tipo de representación: por lo que se usa la representación decimal de $\mathbb{R}$.

Capítulo 4

Aspectos históricos, epistemológicos y disciplinares

Teniendo en cuenta la revisión bibliográfica en relación con los números reales se tiene que la formalización del concepto de número real se constituye en un proceso que le llevó a la humanidad más de veinte siglos en concretar. En este capítulo se mencionan aspectos relevantes que favorecieron esta formalización. Se inicia con la concepción de números en Grecia, continuando con el trabajo desarrollado en India y Europa en relación con el álgebra y finalizando con la formalización del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, con los trabajos de Cantor y Dedekind y la presentación axiomática propuesta por Hilbert.

El trabajo de los griegos, con la axiomatización de la geometría en los Elementos de Euclides en la que específicamente un número se concibe como la repetición de unidades y como éste puede estar asociado a la magnitud de un segmento, sustenta todo el trabajo de la época en matemáticas. A partir de ella se desarrolla el trabajo relacionado con la aritmética, las razones y proporciones. El hallazgo de las magnitudes inconmensurables genera una crisis, que trae como consecuencia una división del trabajo respecto del tratamiento que le dan los griegos a los números. Como relaciones entre números naturales en relación con las magnitudes conmensurables y como aproximaciones entre razones de números y proporciones con las inconmensurables.

En India el desarrollo de la teoría de la solución de ecuaciones, a partir de problemas que son resolubles por parte de al-Khwarizmi, da inicio a una nueva rama de las matemáticas, “el álgebra”, promoviendo una separación aún más fuerte del trabajo respecto de estas dos disciplinas, (aritmética y geometría) y dando una nueva perspectiva del concepto de número como solución de una ecuación. Esta nueva rama de las matemáticas, no sólo se preocupa por la solución de la ecuación, sino que trasciende al análisis de la naturaleza de las raíces según su grado [33].

La introducción del álgebra en Europa tiene un amplio desarrollo, particularmente con el trabajo de Cardano, siglo XVI, en el que se alude al tipo de soluciones de una ecuación, clasificándolas como "verdaderas" a aquellas que son positivas y "ficticias o falsas" a las que son negativas, evidencia la necesidad de ampliar el dominio de los números naturales para la solución de situaciones.

Posteriormente el trabajo de Descartes, siglo XVII, en el que se introduce un sistema de referencia para la solución de problemas geométricos, traerá como consecuencia la aceptación de los números negativos como los inversos aditivos de las cantidades positivas, lo que favorece el desarrollo de la geometría analítica en la que existe una idea intuitiva de la correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales. Complementario a lo anterior, Descartes aborda las operaciones de la multiplicación y división entre segmentos, estableciendo el procedimiento para el cual el resultado de la operación es un segmento, lo que implica que a las operaciones entre segmentos se les puede dotar de estructura algebraica (suma y multiplicación), aspecto que en siglos posteriores aportará en la formalización de $\mathbb{R}$.

Finalmente, se abordan los trabajos de Cantor y Dedekind, en el siglo XIX con los que se formaliza el conjunto de los números reales a partir de la necesidad de establecer una correpondencia de este conjunto con los puntos de la recta (continuidad), por una parte Cantor los define por medio de intervalos encajados y de sucesiones fundamentales, y por otra, Dedekind lo hace introduciendo la definición de cortadura. Por último, se hace la presentación axiomática hecha por D. Hilbert y se muestran algunas consecuencias (teoremas) de dichos axiomas.

4.1. El concepto de número en Grecia

En esta sección se expondrán aspectos relevantes del concepto de número y cómo este permitió el desarrollo de la teoría de las razones y proporciones. Luego se abordará el tratamiento de las magnitudes inconmensurables como la crisis que deja sin cimientos la teoría desarrollada anteriormente, al no poder aplicar los procedimientos propios de las magnitudes conmensurables y cuya consecuencia consiste en dar al concepto de número dos significados distintos.

4.1.1. El número asociado a la magnitud de segmentos

La escuela Pitagórica centra su trabajo en la explicación de la naturaleza utilizando las matemáticas mediante el uso de los números y las relaciones existentes entre ellos. En esta época, un número se concibe como la repetición de unidades y una relación con la naturaleza consiste en que a la magnitud de un segmento se le puede asociar un número, asociación que pone de manifiesto la relación existente entre lo numérico y lo geométrico. Inicialmente existe una característica que diferencia la unidad y el número, como se muestra a continuación en las definiciones tomadas del libro VII de los Elementos de Euclides:

Definición I: Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada uno.

Definición II: Un número es una pluralidad compuesta de unidades.

De las anteriores definiciones se puede inferir que para Euclides, la unidad no es un número, es el principio de un número y por tanto, no puede tener el mismo estatus que el de número, debido a que no se puede entender lo singular y lo plural de la misma manera [33].

En la siguiente tabla se muestran dos posibles representaciones para las definiciones:

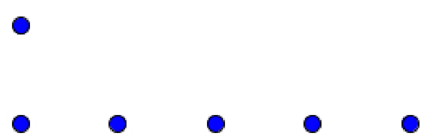
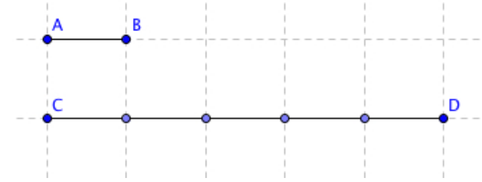
Representación de la unidad y un número a partir de puntos	Representación de la unidad y de un número asociada a la magnitud de un segmento
	Si $\overline{AB}$ es corresponde a la unidad se tiene 

Tabla 4.1: Posibles representaciones de la unidad y número de acuerdo con la concepción en Grecia.

Como consecuencia de lo anterior existen dos aspectos que hay que tener presentes; el primero, la idea intuitiva de la noción de adición de segmentos como repetición de unidades y el segundo, que las relaciones entre números (razones) no son números.

De la primera representación, para la noción de adición se tiene que por ejemplo $3+5=8$ a partir de una representación como la siguiente:

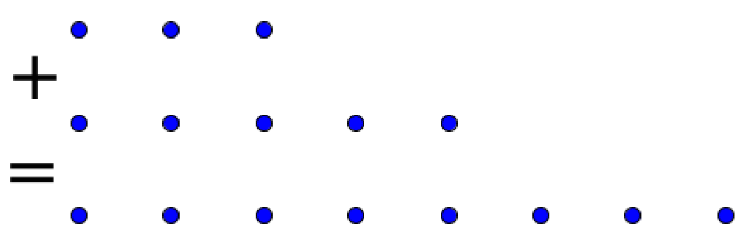


Figura 4.1: Adición por repretición de puntos.

Para la segunda representación, a partir de la magnitud de un segmento, se tiene que dado $\overline{AB}$ que es la repetición de tres unidades, se puede construir junto a él, $\overline{CD}$ repitiendo cinco veces la unidad y por tanto, el resultado es ocho unidades, como se muestra en la siguiente figura.

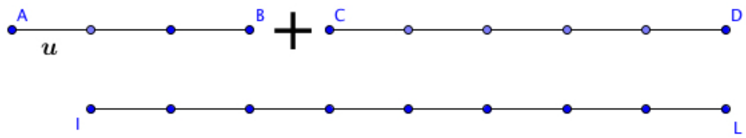


Figura 4.2: Adición por repetición de segmentos.

4.1.2. Los segmentos conmensurables

El estudio de las relaciones entre números tiene su desarrollo en los Elementos de Euclides, específicamente en el libro V, en el que se presenta el trabajo referido a las razones y las proporciones de magnitudes homogéneas.

Dadas dos magnitudes A y B de la misma naturaleza, éstas son *conmensurables* si existen dos números naturales n y m, tales que:

$$nA = mB$$

Por ejemplo que si se tienen los segmentos $\overline{AB}, \overline{CD}$ y $\overline{EF}$, en este caso es posible determinar una relación entre ellos de manera que se pueden establecer los números m y n, como se muestra a continuación.

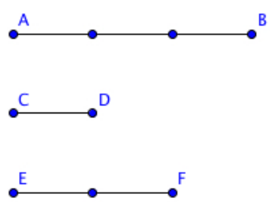


Figura 4.3: Comparar segmentos.

De acuerdo con la figura anterior, si se comparan $\overline{AB}$ con $\overline{CD}$, se tiene que tres veces $\overline{CD}$ equivale a $\overline{AB}$, de otro lado si se quiere comparar $\overline{EF}$ con $\overline{CD}$ se tiene que dos veces $\overline{CD}$ equivale a $\overline{EF}$. Pero al comparar $\overline{AB}$ con $\overline{EF}$ no se pueden establecer relaciones como las anteriores. Lo que hace necesario establecer una nueva relación, que es: tres veces $\overline{EF}$ equivale a dos veces $\overline{AB}$, por lo que la relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ se puede establecer a través de números, es decir: $\overline{AB}$ es a $\overline{EF}$ como 2 es a 3.

Este procedimiento se pone de manifiesto en el libro X de los Elementos.

Proposición III: dadas dos magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.

Lo que es equivalente a decir que es posible determinar un segmento que mida a dos segmentos al mismo tiempo y cuya medida sea la mayor posible.

Ejemplo de esto:

Dados los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, conmensurables, es posible hallar la medida más grande que los mide (figura 4.4).

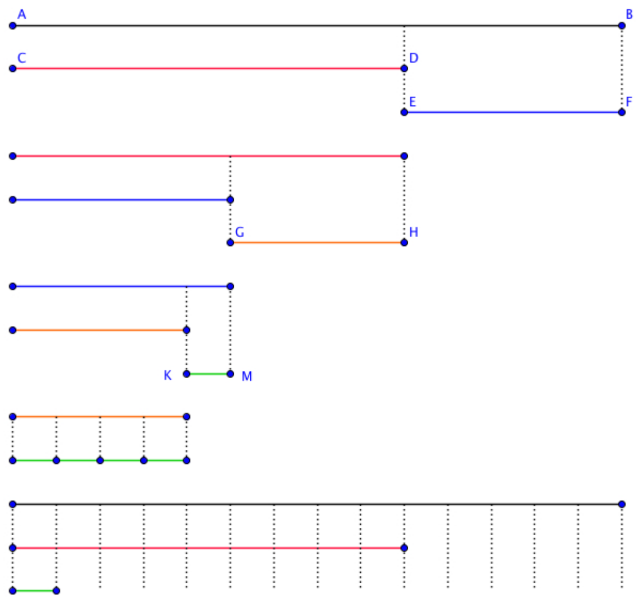


Figura 4.4: Determinar el segmento de mayor medida que mide a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

El procedimiento para este caso es:

$\overline{CD}$, cabe una vez en $\overline{AB}$ y el exceso es $\overline{EF}$.
$\overline{EF}$, cabe una vez en $\overline{CD}$ y el exceso es $\overline{GH}$.
$\overline{GH}$, cabe una vez en $\overline{EF}$ y el exceso es $\overline{KM}$.
$\overline{KM}$ es cuatro veces $\overline{GH}$.

Con lo que se concluye que $\overline{KM}$ resulta ser el mayor que mide a los segmentos, de donde se tiene que:

$$\overline{AB} = \overline{CD} + \overline{ED}$$
$$\overline{CD} = \overline{EF} + \overline{GH}$$
$$\overline{EF} = \overline{GH} + \overline{KM}$$
$$\overline{GH} = 4 \cdot \overline{KM}$$

Sustituyendo se obtiene que:

$$\overline{AB} = 14 \cdot \overline{KM} \text{ y } \overline{CD} = 9 \cdot \overline{KM}$$

En conclusión, la relación entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es la misma que la relación entre 14 y 9. Este procedimiento puede ser extenso, dependiendo de las magnitudes que se tomen, pero teniendo en cuenta que las magnitudes son conmensurables, siempre tendrá un número finito de pasos para establecer dicha razón, más detalles pueden consultarse en [33].

4.1.3. La irracionalidad de $\sqrt{2}$

La creencia de los pitagóricos de que a toda relación entre magnitudes homogéneas se le puede asociar una razón entre números naturales, fue desvirtuada al buscar la razón entre la diagonal de un cuadrado con su lado, el perímetro de la circunfernecia con su diámetro o la diagonal de un pentágono regular con su lado. Por ello, prueban de manera indirecta la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con respecto a su lado, esto es *no hay una razón numérica* que se pueda asociar a la razón entre la diagonal de un cuadrado y su lado, por lo que a este tipo de razones entre magnitudes las llaman irracionales.

En el caso de $\sqrt{2}$ que es la diagonal de un cuadrado de lado uno, se tiene que al aplicar el procedimiento para las magnitudes conmensurables el número de pasos que se realiza nunca termina (es indefinido). A continuación se hace una descripción del método usado y que presenta con más detalle A. Campos en [4].

Sea ABCK un cuadrado y $\overline{AC}$ una diagonal.

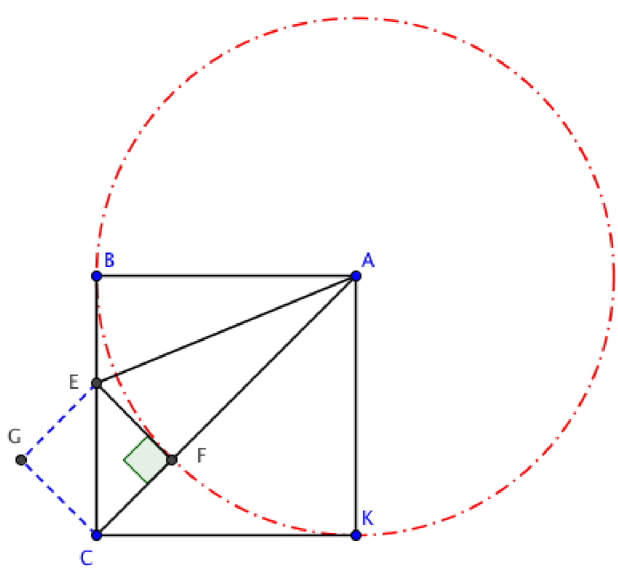


Figura 4.5: Inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$.

F es el punto de $\overline{AC}$ tal que $\overline{AF} \cong \overline{AB}$, por lo que $AF = AB$.

E es el punto de $\overline{BC}$ tal que $\overline{EF}$ es perpendicular a $\overline{AC}$ en F, por lo tanto $\triangle AFE$ y $\triangle ABE$ son rectángulos.

Utilizando el teorema de Pitágoras se tiene que:

en el $\triangle AFE$

$$(AE)^2 = (AF)^2 + (FE)^2 \tag{4.1}$$

en el $\triangle ABE$

$$(AE)^2 = (AB)^2 + (BE)^2 \tag{4.2}$$

Por otra parte, $AB = AF$ por construcción y remplazando AF en la ecuación (4.1) se tiene que:

$$(AE)^2 = (AB)^2 + (FE)^2 \tag{4.3}$$

Igualando (4.3) y (4.2), se obtiene que

$$BE = EF \tag{4.4}$$

Finalmente, en $\triangle EFC$ el ángulo $\angle EFC =$ es recto (90^o) por construcción y $\angle ECF = 45^o$ porque $\overline{AC}$ es la diagonal del cuadrado entonces $\angle CEF = 45^o$.

Por lo anterior se concluye que $\triangle EFC$ es rectángulo e isóceles, y por lo tanto $\overline{EC}$ es la diagonal del cuadrado FEGC, aspecto que implica que se debe realizar nuevamente el procedimiento inicial. Este procedimiento se realizará de manera indefinida ya que siempre se obtiene la diagonal de un cuadrado y contradice que el número pasos a realizar es finito. Por lo tanto, la diagonal del cuadrado ABCD y su lado son inconmensurables.

El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables da inicio a una crisis en relación con la manera en la que estaba estructurado el conocimiento (creencia de que todo es conmensurable) y como resultado se tiene que el trabajo de los griegos se centra en la Geometría y no en la Aritmética, que se estanca hasta el trabajo de Diofanto en el siglo III.

4.1.4. Construcciones con regla y compás y los problemas clásicos

El uso de la regla y el compás juega un papel importante en el trabajo realizado por los griegos en Geometría. Específicamente en [4] se expone que en el libro los Elementos de Euclides se presentan los conceptos con la siguiente estructura:

13 libros, casi todos inician con definiciones (frases para introducir un concepto matemático), seguido a esto se presentan proposiciones (teoremas) y sus demostraciones. En el libro número I además de las definiciones, aparecen postulados y nociones comunes (Axiomas).

De acuerdo con [4] **los cinco postulados**, principios relativos a la geometría son:

P.1 Trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta otro punto cualquiera.

P.2 Prolongar indefinidamente una línea recta limitada en línea recta.

P.3 Trazar un círculo con centro y distancia cualquiera.

P.4 Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

P.5 Si una línea recta incide sobre dos líneas rectas y hace ángulos internos por un mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se encuentran por el lado en que están los ángulos menores que dos ángulos rectos.

Las cinco nociones comunes, principios relativos para cualquier ciencia son:

NC.1 Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.

NC.2 Si iguales se adicionan a iguales, los totales son iguales.

NC.3 Si iguales se sustraen de iguales, los restos son iguales.

NC.4 Las cosas que coinciden entre sí, son iguales entre sí.

NC.5 El todo es mayor que la parte.

Para realizar las demostraciones de las proposiciones (teoremas) en los *Elementos de Euclides* se presenta la siguiente estructura:

1. Un enunciado general.
2. Una figura.
3. Un enunciado referido a la figura.
4. Una construcción que indica el trazado de líneas o de círculos, los cuales son necesarios para realizar la demostración.
5. La demostración, una secuencia de razonamientos que parten de la hipótesis y que logran el resultado anunciado.

Por ejemplo: la proposición I del libro I.

- Paso 1: Enunciado general.

"Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada".

Es importante resaltar que una recta finita corresponde en la actualidad a un segmento.

- Paso 2: Figura.

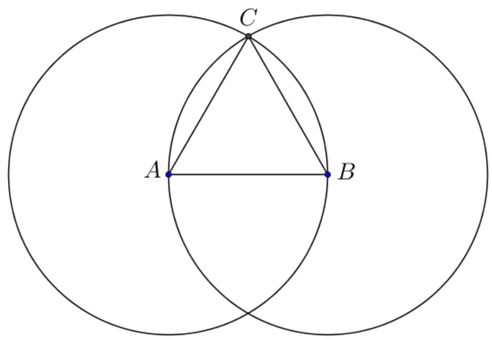


Figura 4.6: Construcción del triángulo equilátero.

- Paso 3: Un enunciado referido a la figura.
  Sea $\overline{AB}$ la recta dada, entonces hay que construir sobre ella un triángulo equilátero.

- Paso 4: Una construcción que indica el trazado de líneas o de círculos, los cuales son necesarios para realizar la demostración.

  1. Trazar la circunfencia de centro A y radio AB. (Postulado 3)
  2. Trazar la circunfencia de centro B y radio BA. (Postulado 3)
  3. Llamar C al punto de intersección de las circunferencias.
  4. Trazar $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ (Postulado 1).

- Paso 5: La demostración, una secuencia de razonamientos que parten de la hipótesis y que logran el resultado anunciado.

  - $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ Por ser radios de la misma circunferencia. (definición de circunferencia)
  - $\overline{BC} \cong \overline{AB}$ Por ser radios de la misma circunferencia. (definición de circunferencia)

  Entonces, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ porque cosas iguales a una misma cosa, son iguales entre sí (noción común 1, axioma 1).

  Con lo que se tiene que $\triangle ABC$ es equilátero y ha sido construido sobre $\overline{AB}$ que es lo que se pedía realizar.$\blacksquare$

Por tanto, las construcciones con regla y compás juegan un papel relevante en el trabajo desarrollado por los griegos y sustentan los procedimientos que se realizan con números como: $a + b$, $a - b$, entre otros. Con base en lo anterior, surge el interrogante, *¿Todos los números se pueden construir por medio del uso de la regla y el compás?*, para dar respuesta a este interrogante se retoman algunos aspectos tratados anteriormente.

Inicialmente se mencionó que para los griegos un número se concibe como la repetición de unidades, por lo tanto, al asociar un número a la magnitud de un segmento se tiene que los números naturales $\mathbb{N}$ y las relaciones entre números (racionales positivos) pueden ser construidos. Sin embargo, existen otros números de los que no se puede afirmar si es posible construirlos con la regla y el compás como $\sqrt[3]{2}$, este número es consecuencia de abordar la duplicación del cubo, uno de los problemas clásicos. Los otros dos problemas clásicos son la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo que están relacionados con la trascendencia de π, más detalles pueden ser consultados en [4].

El problema de la duplicación del cubo se resume en lo siguiente:

Dado un cubo de volumen a^3, encontrar, utilizando solamente la regla y el compás, un cubo de volumen $2a^3$, como se muestra en la siguiente figura.

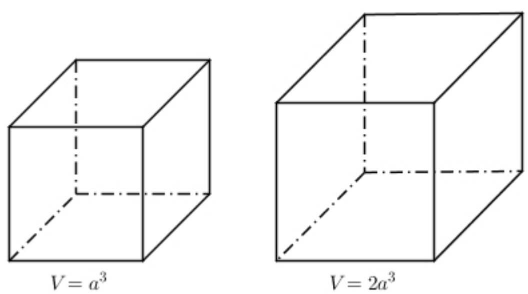


Figura 4.7: Duplicación del cubo.

Sea a la arista de un cubo, entonces su volumen es $V = a^3$ y se quiere determinar la arista b de un cubo tal que el volumen sea el doble del volumen del cubo inicial. Lo que se resume en que si la arista del cubo es 1, con la regla y el compás se debe determinar un segmento cuya magnitud sea $\sqrt[3]{2}$.

Habrá que esperar hasta que Descartes en el siglo XVII desarrolle su teoría (geometría analítica) y el siglo XIX para mostrar que el número $b = \sqrt[3]{2}$ **no** es construible con regla y compás.

4.2. El concepto de número en el desarollo del álgebra

El desarrollo del álgebra está relacionado con la evolución del concepto de número. En esta sección se abordan dos momentos de este desarrollo. Inicialmente se presenta el trabajo realizado en la India, en el que se comienza a utilizar el término "álgebra", no solo por el estudio relacionado con la solución de ecuaciones, sino también por centrarse en aspectos más generales como el tipo de soluciones según su grado. Luego se aborda el trabajo realizado en

Europa, específicamente con los trabajos de Cardano y Descartes en los que se evidencia la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales para darle significado a la solución de algunas ecuaciones como $x^2 = 9$, en la que aparecen soluciones negativas.

Estos aspectos al igual que el de los griegos (las magnitudes inconmensurables), serán importantes para formalizar el conjunto de los números reales.

4.2.1. El álgebra en India

Es de resaltar que el trabajo relacionado con el álgebra no inicia en la India. Sus inicios se remontan a las diferentes culturas que se desarrollaron en Mesopotamia, en donde se tenía conocimiento acerca de la solución de ecuaciones de segundo grado, la solución de sistemas de ecuaciones por eliminación de incógnitas y el cálculo de raíces cuadradas y cúbicas, entre otras [5]. Sin embargo, es en India, con el trabajo de al-Khwarizmi donde aparece el nombre álgebra para designar este campo disciplinar de las matemáticas, resaltando que el álgebra no sólo se genera al designarla por esta palabra sino porque consolida la concepción de un nuevo vocabulario técnico destinado a designar objetos y operaciones específicos [33], que surgen como necesidad de dar solución a problemas de la época.

En el trabajo de al-Khwarizmi el álgebra se encuentra en el nivel de "álgebra retórica[3]", es decir, no se utilizan símbolos ni siquiera para denotar los números como se hace en la actualidad. En este trabajo al-Khwarizmi utiliza tres tipos de números para realizar los cálculos: "raíz", "posesión" o "tesoro" y números.

Una situación propuesta en estos términos es:

> "Un tesoro y diez raíces del mismo tesoro igualan a treinta y nueve números."

Que se traduce como:

$$x^2 + px = q \text{ con } p = 10 \text{ y } q = 39$$
$$x^2 + 10x = 39$$

cuyas soluciones son $x = 13$ y $x = -3$

En la notación actual y de la que se puede concluir que tesoro corresponde al término de grado 2, raíz es el término de grado 1 y el número es el término independiente.

El aspecto más relevante en el álgebra de al-Khwarizmi es que él se refiere a las cantidades como números, aspecto que lo diferencia de los griegos para los cuales son magnitudes geométricas.

[3]El álgebra está dividida en tres niveles, retórica, sincopada y simbólica, estos niveles se presentan en G.H.F Nesselman en el libro *Die Algebra der Griechen*, Berlín 1842, (Vasco citado en [33])

En la medida que se desarrolla el álgebra surge la necesidad de utilizar un lenguaje más apropiado y como consecuencia del uso del sistema de numeración decimal (de acuerdo con Malagón et al. en [33], la introducción del sistema decimal se atribuye a Brahmagupta), se trasciende siglos después al álgebra simbólica (utilizada actualmente).

4.2.2. El álgebra en Europa

La manipulación de símbolos inicia aproximadamente a la mitad del siglo XIII, como consecuencia de la introducción definitiva del sistema decimal en Europa. Sin embargo, el desarrollo se ve disminuido en parte por la aparición de la peste negra, la guerra entre Francia e Inglaterra y especialmente por el desarrollo del cálculo infinitesimal. Es importante resaltar que el trabajo en álgebra no se abandona del todo, se encuentran ejemplos del sistema decimal como la introducción de modelos exponenciales y logarítmicos y la invención de operadores equivalentes a los números fraccionarios de hoy, entre otros. Paulatinamente se van simplificando los procedimientos de manera que se pueden abreviar palabras y símbolos, dando origen al denominado lenguaje simbólico [33], y que inicialmente es introducido por Vieta [3].

El trabajo en álgebra toma nuevamente fuerza alrededor del siglo XVI en el que Cardano en *Ars Magna*, utilizando un lenguaje retórico determina las soluciones de las ecuaciones de tercer y cuarto grado por medio de radicales y donde nuevamente se pone de manifiesto la necesidad de ampliar el concepto de número.

En el primer capítulo de *Ars Magna*, se abordan las soluciones de ecuaciones cuyo exponente es una potencia par: como $x^2 = 9, x^2 = 81$ entre otras. Es allí , que se hace una clasificación del tipo de soluciones de cada ecuación en dos, las denominadas como"verdaderas" aquellas que son positivas y las "ficticias" aquellas que son negativas, seguido a esto se abordan las potencias impares, con las que concluye por ejemplo que: un cubo negativo no puede provenir de un número verdadero.

La no aceptación de los números negativos, implica que debe abordar diferentes casos para una misma ecuación ya que estas no pueden tener coeficientes negativos; por otra parte, Cardano conoce de las raíces cuadradas de números negativos a las que él denomina "verdaderamente sofísticas" y le impide llegar a la teoría general de la solución de ecuaciones la cual era su propósito [33].

Posteriormente, Descartes juega un papel importante en la ampliación del dominio numérico de $\mathbb{N}$ debido a que establece la relación proporcional entre longitudes de segmentos e instrumentaliza el lenguaje simbólico para el álgebra propuesto por Vieta [33]. Su trabajo aborda los problemas geométricos a partir del álgebra, lo que da inicio a la geometría analítica. Por otra parte, la introducción de un sistema de referencia para representar los números en la recta ayuda a que sean aceptados los números negativos e implica el uso de una unidad de medida, por lo que ahora con el uso de las proporciones la multiplicación, división y raíz cuadrada entre segmentos tiene como resultado un segmento.

La posición relativa de los números en la recta numérica

Para abordar las raíces "falsas", Descartes establece que estas cantidades negativas se deben poder representar por medio de segmentos. Para esto asume que: "estas cantidades son menores que cero", por lo que establece una orientación ellas a partir de un punto dado [33], como se hace actualmente en la recta numérica. Esta situación da un carácter relativo a estos números pues dependen del lugar en el que se ubique el punto de referencia como se muestra en la siguiente figura. De acuerdo con Malagón en [33] el trabajo de Descar-

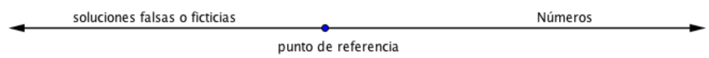


Figura 4.8: Punto de referencia en la recta.

tes en *La Geometría* expone una relación entre el número como "ente" y su representación geométrica (magnitud de un segmento). Por lo tanto, el número está ligado a la posibilidad de ser representado a través de segmentos y éste a su vez es la representación abstracta de las magnitudes geométricas.

De acuerdo con lo anterior las "raíces falsas" deben poderse representar como segmentos, por lo que para solucionar este inconveniente Descartes asume que dichas cantidades deben ser "menores que cero" e introduce un significado sintáctico, al afirmar que por ejemplo:

"si x representa el defecto de una cantidad, que si es 7"

se tendrá la expresión:

$$x + 7 = 0$$

Con base en el ejemplo, las cantidades negativas corresponden a los inversos aditivos de las cantidades positivas, adquiriendo no sólo un caracter geométrico, sino además algebraico [33].

Sistema de Referencia y unidad de medida

Para introducir un sistema de referencia, se requiere la introducción de una unidad de medida. A partir de esto, Descartes puede realizar la multiplicación, división y raíz cuadrada entre segmentos y el resultado, a diferencia de Euclides, es un segmento.

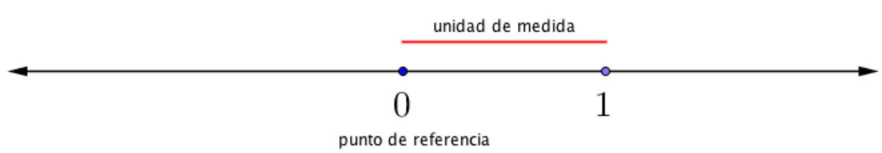


Figura 4.9: Unidad de medida en la recta.

4.2.3. Representaciones con la regla y el compás

Las construcciones con regla y compás son un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas. Usando estas herramientas evolucionó casi todo el conocimiento Griego [7]. La regla no cumple la función de medir sino que simplemente sirve para realizar trazos de recta (segmento) y el compás (cuerda) sí permitía realizar esta actividad.

El propósito de esta sección es presentar la aritmética que se puede desarrollar con estos instrumentos, como por ejemplo: realizar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y raíz cuadrada, a partir del trabajo desarrollado por Descartes.

4.2.4. Operaciones con segmentos utilizando regla y compás

Definición: un número no negativo α es construible, si usando la regla y el compás, se puede construir un segmento de longitud α, a partir de un segmento dado y definido como el segmento unidad. [7]

Adición de segmentos

Construir un segmento que corresponda a la suma de dos segmentos dados.

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos y una semirrecta $\overrightarrow{EW}$, se procede como sigue:

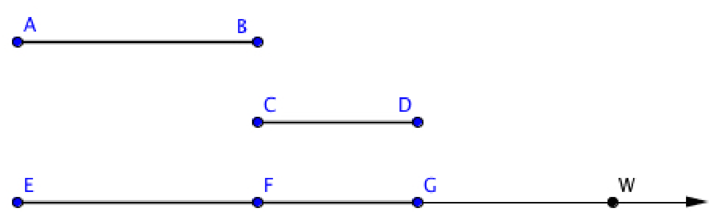


Figura 4.10: Adición de segmentos.

Se traslada $\overline{AB}$ sobre $\overrightarrow{EW}$ iniciando en el punto E y formando $\overline{EF}$, luego se traslada $\overline{CD}$ sobre $\overrightarrow{EW}$ iniciando en F, formando $\overline{FG}$. Por lo tanto, por construcción se tiene que:

$$AB = EF \tag{4.5}$$

$$CD = FG \tag{4.6}$$

De donde $EG = AB + CD$ y por lo tanto $\overline{EG} = \overline{EF} + \overline{FG} \cong \overline{AB} + \overline{CD}$.

Ahora bien si se supone que $AB = k$ y $CD = w$, evidentemente se tiene que

$$EG = k + w$$

Por tanto, se puede construir un segmento que corresponda a la suma de los dos segmentos dados inicialmente.■

Sustracción de segmentos

Dados dos segmentos, construir un segmento de tal manera que su medida corresponda a la diferencia de dos segmentos dados.

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos, $\overline{AB} > \overline{CD}$ y una semirrecta $\overrightarrow{HM}$, se procede de la siguiente manera:

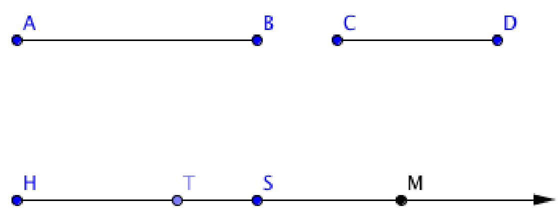


Figura 4.11: Sustracción de segmentos.

Se traslada $\overline{AB}$ sobre $\overrightarrow{HM}$ iniciando en el punto H y formando $\overline{HS}$, luego se traslada $\overline{CD}$ sobre $\overrightarrow{HM}$ iniciando en el punto H, formando $\overline{HT}$. Por lo tanto, se tiene por construcción que las medidas de los segmentos:

$$AB = HS \tag{4.7}$$

$$CD = HT \tag{4.8}$$

De donde $TS = AB - CD$ y por lo tanto $\overline{TS} = \overline{HS} - \overline{HT} \cong \overline{AB} - \overline{CD}$.

Ahora bien si suponemos que $AB = k$ y $CD = w$, evidentemente se tiene que

$$TS = k - w$$

Por tanto se puede construir el segmento que corresponda a la diferencia de los dos segmentos dados$\blacksquare$.

Multiplicación de segmentos

Construir un segmento de tal manera que corresponda al producto de los dos segmentos dados.

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos, $\overline{IJ}$ la unidad de medida y dos semirrectas $\overrightarrow{OZ}$ y $\overrightarrow{OP}$, como se muestra en la siguiente figura (4.12) y para la construcción se procede como sigue:

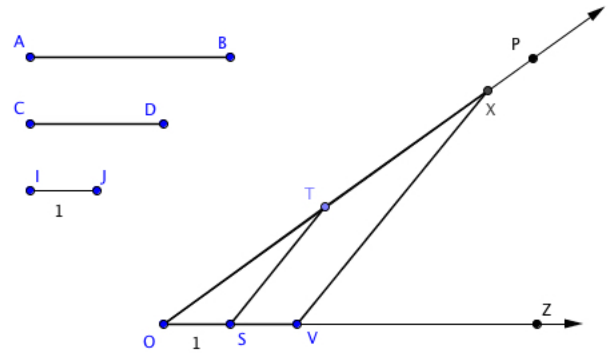


Figura 4.12: Multiplicación de segmentos.

- Se traslada $\overline{AB}$ sobre $\overrightarrow{OP}$ iniciando en O y formando $\overline{OT}$, luego se traslada $\overline{CD}$ sobre $\overrightarrow{OZ}$ iniciando en O, formando $\overline{OV}$. por último se traslada la unidad de medida $\overline{IJ}$ sobre $\overrightarrow{OZ}$ iniciando en O y formando $\overline{OS}$.
- Se Traza $\overline{ST}$ para formar el $\triangle OST$.
- Se traza una paralela a $\overline{ST}$ que pase por V y que se corte con $\overrightarrow{OP}$ en el punto X formando el $\triangle OVX$.

De donde se tiene que $\triangle OST$ y $\triangle OVX$ son semejantes, es decir

$$\triangle OST \sim \triangle OVX$$

Demostración:

1. $\angle SOT \cong \angle VOX$	Es un ángulo común a los dos triángulos.
2. $\angle OST \cong \angle OVX$	Por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

Por tanto, por la semejanza de triángulos, específicamente por el criterio AA (ángulo ángulo[4]) se tiene que los triángulos son semejantes.

De donde se establece la proporción:

$$\frac{OS}{OT} = \frac{OV}{OX}.$$

Por lo tanto

$$OS \cdot OX = OV \cdot OT.$$

Y conociendo que $OS = 1$ se obtiene

[4]Sea una correspondencia entre triángulos. Si dos pares de ángulos son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.[27]

$$1 \cdot OX = OV \cdot OT.$$

es decir

$$OX = OV \cdot OT.$$

En particular si $AB = k$ y $CD = w$

$$OX = k \cdot w,$$

Por lo tanto, se concluye que se puede construir un segmento que corresponda a la multiplicación de dos segmentos dados.■

División de segmentos

Construir un segmento de tal manera que corresponda a la división de dos segmentos dados.

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos, $\overline{EF}$ la unidad de medida y dos semirrectas $\overrightarrow{OZ}$ y $\overrightarrow{OX}$, se procede como sigue:

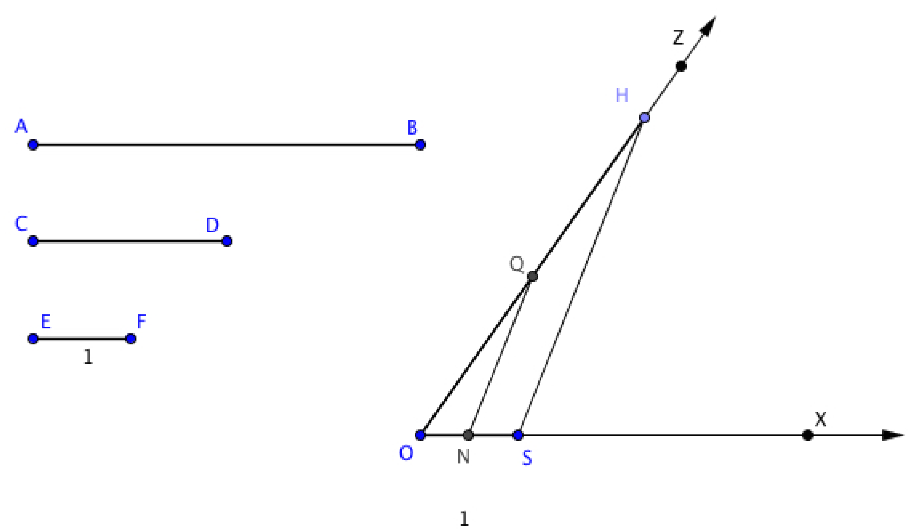


Figura 4.13: División de segmentos.

- Se traslada $\overline{AB}$ sobre $\overrightarrow{OZ}$ iniciando en O y formando $\overline{OH}$, luego se traslada $\overline{CD}$ sobre $\overrightarrow{OZ}$ iniciando en O y formando $\overline{OQ}$. Por último, se traslada la unidad de medida $\overline{EF}$ sobre $\overrightarrow{OX}$ iniciando en O y formando $\overline{OS}$.
- Se traza $\overline{SH}$ para formar el $\triangle OSH$.

- Se traza una paralela a $\overline{SH}$ que pase por Q y que se corte con $\overrightarrow{OX}$ en el punto N formando el $\triangle ONQ$.

De donde se tiene que:

$$\triangle OSH \sim \triangle ONQ$$

Demostración:

1. $\angle SOH \cong \angle NOQ$	Es un ángulo común a los dos triángulos.
2. $\angle OSH \cong \angle ONQ$	Por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

Por el criterio de semejanza de triángulos AA (ángulo ángulo) se tiene que los triángulos son semejantes.

De donde se establece la proporción:

$$\frac{OS}{OH} = \frac{ON}{OQ},$$

Por lo tanto

$$\frac{OS \cdot OQ}{OH} = ON$$

Conociendo que $OS = 1$ se concluye que

$$\frac{OQ}{OH} = ON$$

En particular si $AB = k$ y $CD = w$ entonces se tiene que

$$ON = \frac{w}{k}.$$

Por lo tanto, se puede construir un segmento que corresponda a la división de dos segmentos dados.■

La raíz cuadrada de un segmento a partir de la multiplicación

Construir un segmento que corresponda a la raíz cuadrada de la multiplicación de dos segmentos dados.

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos y $\overrightarrow{RX}$ una semirrecta, se procede como sigue:

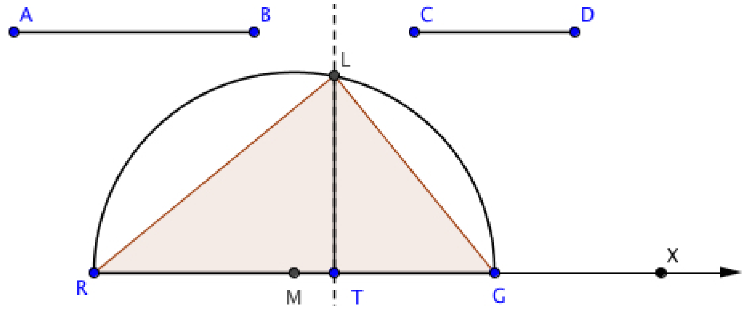


Figura 4.14: Raíz cuadrada de la multiplicación de dos segmentos.

- Se traslada $\overline{AB}$ sobre $\overrightarrow{RX}$ iniciando en el punto R y formando$\overline{RT}$.
- Se traslada $\overline{CD}$ sobre $\overrightarrow{RX}$ iniciando en R y formando $\overline{TG}$.
- Se determina el punto medio de $\overline{RG}$ y llamarlo M.
- Se traza la semicircunferencia de centro M y radio $\overline{MR}$.
- Se traza la perpendicular a $\overline{RG}$ que pasa por T y que corta a la semicircunfernecia en L.
- Se traza $\overline{LT}$ y se forman $\triangle RTL$, $\triangle RLG$ y $\triangle LTG$ que son rectángulos y semejantes, es decir:

$$\triangle RTL \sim \triangle RLG \sim \triangle LTG$$

Demostración:

1. $\triangle RTL \sim \triangle RLG$

a. $\angle TRL \cong \angle LRG$	Es un ángulo común a los dos triángulos.
b. $\angle TRL \cong \angle RLG$	Por ser ángulos rectos.

Por el criterio de semejanza de triángulos AA (ángulo ángulo) se tiene que los triángulos son semejantes.
De donde se obtiene que

$$\triangle RTL \sim \triangle RLG \tag{4.9}$$

2. $\triangle RLG \sim \triangle LTG$

a. $\angle RGL \cong \angle LGT$	Es un ángulo común a los dos triángulos.
b. $\angle RLG \cong \angle LTG$	Por ser ángulos rectos.

Por el criterio de semejanza de triángulos AA (ángulo ángulo) se tiene que los triángulos son semejantes. Por lo que se obtiene

$$\triangle RLG \sim \triangle LTG \tag{4.10}$$

Como la semejanza de triángulos cumple la propiedad transitiva, se tiene de las expresiones (4.9) y (4.10) que:

$$\triangle RTL \sim \triangle LTG \tag{4.11}$$

Por lo que se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{RT}{LT} = \frac{LT}{TG}$$

Despejando LT de la expresión anterior se tiene

$$RT \cdot TG = LT^2$$

En particular si $AB = k$ y $CD = w$ entonces

$$k \cdot w = LT^2$$

Por lo tanto

$$\sqrt{k \cdot w} = LT$$

Por lo que se puede construir un segmento que corresponda a la raíz cuadrada de la multiplicación de dos segmentos dados.■

Los números que se pueden construir con regla y compás

Como se mencionó antes, los griegos a partir de la geometría pudieron desarrollar una aritmética basada en las construcciones con la regla y el compás, con la que se pueden construir los segmentos cuya magnitud corresponda a los números naturales. Ahora, con el aporte de Descartes se pueden ampliar este tipo de construcciones a los racionales y raíces cuadradas de números ya construidos.

Por ejemplo: si se considera como unidad $\overline{AB}$ al repetirlo se obtienen "todos" los números naturales. En particular 2 y 3.

De acuerdo con las operaciones entre segmentos (multiplicación y división), se tiene que los segmentos $3 \cdot 2$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$ pueden ser construidos, como se muestra a continuación.

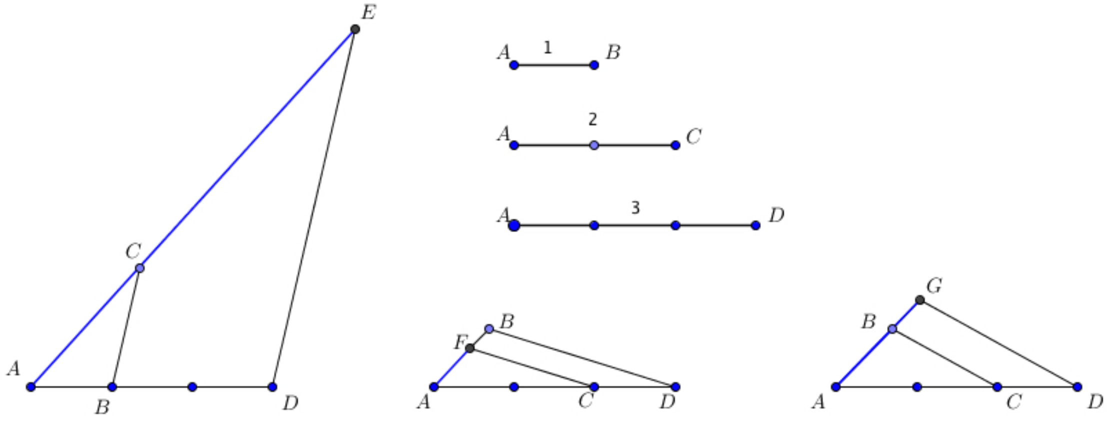


Figura 4.15: Operaciones de multiplicación y división entre segmentos

De la figura anterior (4.15) se tiene que:

$$AE = 3 \cdot 2,\ AF = \frac{2}{3} \text{ y } AG = \frac{3}{2}$$

Ahora en el caso de la raíz cuadrada se tiene que para 2 y 3, se puede construir $\sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$, como se muestra a continuación.

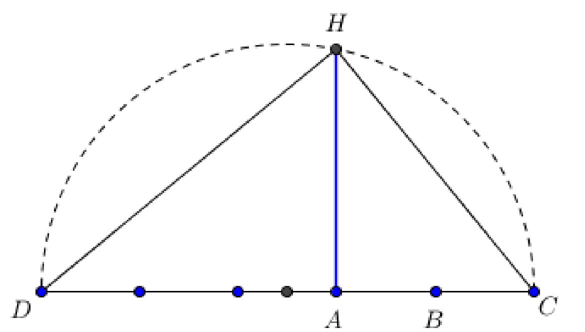


Figura 4.16: Operación de raíz cuadrada entre segmentos.

Realizando operaciones entre los segmentos anteriores, se pueden obtener expresiones como $\frac{2}{3} + \frac{3}{2}$, $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{6}$ y $\sqrt{6} \div \frac{2}{3}$. Para el procedimientos de la raíz cuadrada con $\sqrt{6}$ y 1 se obtiene $\sqrt{\sqrt{6}}$, y repitiendo el proceso entre $\sqrt{\sqrt{6}} = \sqrt[4]{6}$ y 1, se obtiene $\sqrt{\sqrt{\sqrt{6}}} = \sqrt[8]{6}$.

En conclusión se tiene que con el aporte de Descartes y usando regla y compás se puede hacer la construcción de los números naturales, los enteros y los racionales, en el caso de las raíces se pueden construir aquellas que sean potencia de 2.

Luego, en términos geométricos se tiene que el problema de la duplicación del cubo se reduce a mostrar que $\sqrt[3]{2}$ no es construible con estos instrumentos.

Castro [7] expresa que las condiciones específicas para que un número real cualquiera sea construido con la regla y el compás, se establecen en el siguiente teorema:

El Teorema de Wantzel: *Si un número real* $\boldsymbol{a}$ *es construible, existe un polinomio irreducible sobre los racionales* ($\mathbb{Q}$)*, de grado una potencia de dos, tal que* $\boldsymbol{a}$ *es raíz de ese polinomio.*

La demostración de este teorema puede ser consultada en [8], y como consecuencia de este teorema se establece el siguiente colorario:

Colorario: *Si un número real* $\boldsymbol{a}$ *satisface un polinomio irreductible sobre* $\mathbb{Q}$ *de grado* $n \in \mathbb{N}$ *y si* n *no es una potencia de* 2*, entonces* $\boldsymbol{a}$ *no es constructible.*

Por todo lo anterior, se concluye que para que el número $\sqrt[3]{2}$ se pueda construir con la regla y el compás este debe ser una solución de una ecuación cuyo grado sea una potencia de dos, sin embargo, en este caso $\sqrt[3]{2}$ es solución de la ecuación

$$x^3 - 2 = 0$$

Como el grado de la ecuación anterior no es una potencia de 2, se concluye que $\sqrt[3]{2}$ **no puede ser construido con regla y compás**.

De lo anterior se tiene como consecuencia que el problema de la duplicación del cubo no se puede solucionar exclusivamente con el uso de la regla y el compás, como se demuestra en [7] y [15]. Adicional a esto se concluye que la representación de los números reales con la regla y el compás no permite representar todos los números reales.

4.3. La formalización de $\mathbb{R}$, los trabajos de Cantor y Dedekind

En el siglo XIX con el desarrollo del cálculo, se hace necesario la formalización de $\mathbb{R}$. En el trabajo de Cauchy (1821-1823) referido a la convergencia de las series se evidencia la creencia de la existencia de este conjunto de números, ya que para desarrollar su método los utiliza sin llegar a formalizarlos, por lo que su teoría queda sin su fundamento principal. Es entonces cuando inicia el trabajo de varios matemáticos para la formalizar $\mathbb{R}$, entre ellos se encuentran Richard Dedekind, Georg Cantor, Karl Weierstrass y Charles Méray, entre otros.

Uno de los aspectos más relevantes para abordar $\mathbb{R}$ fue que a las matemáticas de la época les atribuían propiedades como la continuidad a partir de la recta geométrica, situación que sólo es válida en ese contexto y no se tiene un fundamento aritmético para la continuidad de $\mathbb{R}$, por lo que inicia el trabajo de fundamentar los números reales de la mejor manera posible. De acuerdo con lo anterior, en [2] se muestra que para la epoca $\mathbb{Q}$ se constituye en la base de dicho trabajo al estar bien fundamentado aritmeticamente.

En esta sección se abordan específicamente los trabajos de Dedekind y Cantor con los que se formalizará $\mathbb{R}$, que son simultáneos y permiten llegar al conjunto de los números reales desde dos perspectivas diferentes, con las que se da un nuevo significado al concepto de número y se finaliza con la presentación axiomática de Hilbert.

4.3.1. El trabajo de Richard Dedekind

El trabajo de Richard Dedekind (1831-1916) respecto de los números reales inicia a partir de la reflexión de las temáticas que impartía en sus clases de cálculo, en las que presentaba el procedimiento de *paso al límite* y el concepto de *convergencia* fundamentados en la continuidad de la recta geométrica. De acuerdo con Arbeláez en [33] Dedekind da a esta labor un valor didáctico, pues permite una aproximación a la noción de continuidad; pero que no aporta nada en un nivel más elevado de conceptualización de esta propiedad. Por lo tanto, es necesario construir la continuidad de manera puramente matemática, es decir, por medio de la aritmética.

En este sentido Dedekind se propone desarrollar un conjunto a partir de $\mathbb{Q}$, así:

> "Este sistema que quiero designar por **R**, posee ante todo una autonomía y un cierre que en otro lugar he designado como un cuerpo de números y consiste en que las cuatro operaciones básicas son siempre ejecutables con dos individuos cualesquiera, es decir, que el resultado de las mismas es siempre un determinado individuo de **R**, si excluimos un único caso, la división por cero" (Dedekind citado por Hawking en [23]).

Inicialmente Dedekind considera una recta cualquiera l y un punto P en ella.

Figura 4.17: Introducción al trabajo de Dedekind.

Observe que la recta l queda dividida en dos partes A_1 y A_2 a partir del punto P, con dos posibilidades para P: que esté en A_1 pero **no** esté en A_2 o que P esté en A_2 pero **no** esté en A_1.

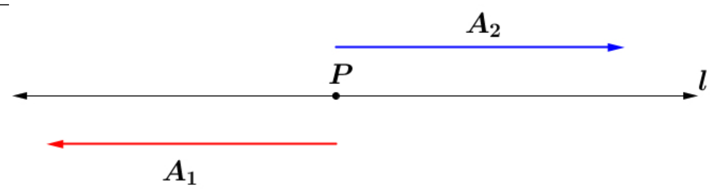


Figura 4.18: Partición de la recta l en dos conjuntos.

Dedekind traslada esta idea a los números racionales $\mathbb{Q}$ y observa que no hay dos posibilidades sino tres para partir el conjunto $\mathbb{Q}$ en dos conjuntos A_1 y A_2 de tal manera que cumplan las siguientes propiedades:

a) $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$

b) $A_1 \bigcap A_2 = \emptyset$

c) $A_1 \bigcup A_2 = \mathbb{Q}$

d) Todos los elementos de A_1 son menores que todos los elementos de A_2.

De donde las tres posibilidades son:

1. El conjunto A_1 tiene máximo y A_2 no tiene mínimo.
2. El conjunto A_1 no tiene máximo y A_2 tiene mínimo.
3. El conjunto A_1 no tiene máximo y A_2 no tiene mínimo.

Definición: una contadura de $\mathbb{Q}$ es una pareja ordenada $\langle A_1, A_2 \rangle$ de subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que cumplen las propiedades anteriores.

Ejemplos:

1. Caso 1: Considere el número racional $\frac{2}{3}$ y los conjuntos:

$$A_1 = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \ x \leq \frac{2}{3} \right\}$$
$$A_2 = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \ x > \frac{2}{3} \right\}$$

que evidentemente cumplen las propiedades de a) a d). Luego $\langle A_1, A_2 \rangle$ es una cortadura tipo 1.

2. Caso 2: Considere el número racional $\frac{2}{3}$ y los conjuntos:

$$A_1 = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \; x < \frac{2}{3} \right\}$$
$$A_2 = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \; x \geq \frac{2}{3} \right\}$$

   que al igual que en el caso 1 cumplen las propiedades de a) a d).

3. Caso 3: Considere los siguientes conjuntos:

$$A_1 = \mathbb{Q}^- \bigcup \{0\} \bigcup \left\{ x \in \mathbb{Q}^+ \mid \; x^2 < 3 \right\}$$

$$A_2 = \{ x \in \mathbb{Q}^+ \mid \; x^2 \geq 3 \}$$

   que evidentemente cumplen las propiedades de a) a d). De donde se tiene que en A_1 están $-1, \frac{2}{3}, 1, \; 1.5$, que siempre son menores que 3, en cambio $2 \in A_2$ pues $4 > 3$. Surgue la pregunta ¿Existe en A_1 un máximo o existe en A_2 un mínimo?

   La repuesta es **no**, pues el posible mínimo de A_2 sería $\sqrt[2]{3}$ que se sabe desde la antigüedad que no es un número racional. Luego este es un ejemplo de cortadura tipo 3.

Definición: Los números reales $\mathbb{R}$ es el conjunto de todas las posibles cortaduras de $\mathbb{Q}$.

Con lo anterior los reales racionales son cortaduras como las presentadas en los casos 1 y 2. Y los reales irracionales son cortaduras como la presentada en el caso 3.

En realidad se debe probar que los números reales así definidos cumplen con todas las propiedades de un cuerpo ordenado y completo. Para ello se define la suma, el producto y la relación de orden entre cortaduras, como sigue:

Sean $\langle A_1, A_2 \rangle, \langle B_1, B_2 \rangle$ dos cortaduras.

Suma:

$$\langle A_1, A_2 \rangle \oplus \langle B_1, B_2 \rangle = \langle A_1 + B_1, A_2 + B_2 \rangle$$

Donde

$$A_i + B_i = \{ a_i \in A_i, b_i \in B_i \mid a_i + b_i \}$$

con $i = 1$ ó $i = 2$

La suma $\langle A_1 + B_1, A_2 + B_2 \rangle$ es una cortadura, además cumple las propiedades:

- Conmutativa.

$$\langle A_1, A_2\rangle \oplus \langle B_1, B_2\rangle = \langle B_1, B_2\rangle \oplus \langle A_1, A_2\rangle$$

- Asociativa.

$$\langle A_1, A_2\rangle \oplus (\langle B_1, B_2\rangle \oplus \langle C_1, C_2\rangle) = (\langle A_1, A_2\rangle \oplus \langle B_1, B_2\rangle) \oplus \langle C_1, C_2\rangle$$

- Modulativa: la cortadura $0^* =$, definida como $\langle A_1, A_2\rangle$ donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \mathbb{Q} \mid \ x \leq 0\} \\ A_2 &= \{x \in \mathbb{Q} \mid \ x > 0\} \end{aligned}$$

  es una cortadura y corresponde al módulo de la adición de cortaduras.

  Demostración: Se debe probar que para cualquier cortadura $\langle A_1, A_2\rangle$, los conjuntos $\langle A_1, A_2\rangle \oplus 0^*$ y A_1 son iguales para lo cual es suficiente ver que cada uno es subconjunto del otro [28].

  (a) Sea $r \in \langle A_1, A_2\rangle + 0^*$, con $r = s + t$, estando $s \in \langle A_1, A_2\rangle$ y $t \in 0^*$, es decir con $t < 0$; al sumar s a los dos miembros de la desigualdad se tiene que $s + t < s$, luego $r < s$ por las propiedades de la definición de cortadura se concluye que $r \in \langle A_1, A_2\rangle$.

  (b) Sea $r \in \langle A_1, A_2\rangle$; como $\langle A_1, A_2\rangle$ no tiene máximo, existe u en $\langle A_1, A_2\rangle$ talque $r < u$, así que $r - u < 0$: se concluye que $r = u + (r - u)$ pertenece a $\langle A_1, A_2\rangle + 0^*$.

  Finalmente por (a) y (b) se tiene que $A_1 + 0^* = A_1$.

- Tiene opuestos (inverso aditivo), $-\langle A_1, A_2\rangle = \{x \in \mathbb{Q} | -x \notin A_1 \ y \ x \ no \ es \ mínimo \ de \ \mathbb{Q} - A_1\}$

  El conjunto $\mathbb{Q} - A_1 = \{x \in \mathbb{Q} \ |x \geq a\}$ tiene como elemento mínimo a, así que $-x \neq a$ por lo que $x \neq -a$, por lo tanto no existe un elemento que sea el máximo.

Para definir correctamente el producto, en primer lugar se debe definir que es una cortadura positiva.

*Definición: una cortadura $\langle A_1, A_2\rangle$ es **positiva** si A_1 contiene un número racional positivo. Es **negativa** si A_2 contiene un número racional negativo y si no se da ninguno de los casos anteriores la cotadura es **nula**.*

Luego se define el valor absoluto

$$|\langle A_1, A_2\rangle| = \begin{cases} \langle A_1, A_2\rangle & \text{si } \langle A_1, A_2\rangle > 0^* \\ -\langle A_1, A_2\rangle & \text{si } \langle A_1, A_2\rangle < 0^* \end{cases}$$

Producto:

Dadas las cortaduras $\langle A_1, A_2\rangle > 0^*$ y $\langle A_1, A_2\rangle > 0^*$ el producto entre ellas se define así:

$$\langle A_1, A_2\rangle \odot \langle B_1, B_2\rangle = 0^* \bigcup \langle A_1 \cdot B_1, A_2 \cdot B_2\rangle$$

Donde

$$A_i \cdot B_i = \{a_i \in A_i, b_i \in B_i \mid a_i \cdot b_i\}$$

con $i = 1$ ó $i = 2$

Por lo tanto el producto entre cortaduras se define por casos:

i. Si $\langle A_1, A_2\rangle > 0^*$ y $\langle B_1, B_2\rangle > 0^*$ entonces $\langle A_1, A_2\rangle \odot \langle B_1, B_2\rangle = 0^* \bigcup \langle A_1 \cdot B_1, A_2 \cdot B_2\rangle$

ii. Si $\langle A_1, A_2\rangle < 0^*$ y $\langle B_1, B_2\rangle \geq 0^*$ entonces $\langle A_1, A_2\rangle \odot \langle B_1, B_2\rangle = -(|\langle A_1, A_2\rangle| \odot \langle B_1, B_2\rangle)$.

iii. Si $\langle A_1, A_2\rangle \geq 0^*$ y $\langle B_1, B_2\rangle < 0^*$ entonces $\langle A_1, A_2\rangle \odot \langle B_1, B_2\rangle = -(\langle A_1, A_2\rangle \odot |\langle B_1, B_2\rangle|)$.

iv. Si $\langle A_1, A_2\rangle < 0^*$ y $\langle B_1, B_2\rangle < 0^*$ entonces $\langle A_1, A_2\rangle \odot \langle B_1, B_2\rangle = (|\langle A_1, A_2\rangle| \odot |\langle B_1, B_2\rangle|)$.

Nótese que dentro del paréntesis siempre se está realizando el producto entre cortaduras no negativas, por lo que están bien definidos.

De acuerdo con [17] y [28], la multiplicación entre cortaduras cumple las siguientes propiedades:

- Conmutativa.

$$\langle A_1, A_2\rangle \odot \langle B_1, B_2\rangle = \langle B_1, B_2\rangle \odot \langle A_1, A_2\rangle$$

- Asociativa.

$$\langle A_1, A_2\rangle \odot (\langle B_1, B_2\rangle \odot \langle C_1, C_2\rangle) = (\langle A_1, A_2\rangle \odot \langle B_1, B_2\rangle) \odot \langle C_1, C_2\rangle$$

- La distributiva con respecto a la suma.

$$\langle A_1, A_2\rangle \odot (\langle B_1, B_2\rangle \oplus \langle C_1, C_2\rangle) = (\langle A_1, A_2\rangle \odot \langle B_1, B_2\rangle) \oplus (\langle A_1, A_2\rangle \odot \langle C_1, C_2\rangle)$$

- Modulativa, el conjunto $1^* = \{x \in \mathbb{Q} | x < 1\}$ es una cortadura y es el módulo de la multiplicación.

- Tiene inversos multiplicativos. Si $\langle A_1, A_2\rangle > 0^*$ se define $\langle A_1, A_2\rangle^{-1} = \{x \in \mathbb{Q} |\ x \leq 0\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{Q}^+ | \frac{1}{x} \notin A_1 \text{ y } \frac{1}{x} \text{ no es mínimo de } \mathbb{Q} - A_1\right\}$. en el caso que $\langle A_1, A_2\rangle < 0^*$ se tiene que $\langle A_1, A_2\rangle^{-1} = -(|\langle A_1, A_2\rangle|)^{-1}$

Orden:

$$\langle A_1, A_2\rangle \leq \langle B_1, B_2\rangle \text{ si y sólo si } A_1 \subseteq B_1$$

Y esto implica que $A_2 \subseteq B_2$, además, si $a \in A_1$, existe $b \in B_2$ tal que $a \leq b$

Teorema: la relación de orden entre cortaduras satisface la tricotomía, en particular, es un orden total.

$$A_1 = A_2 \text{ ó } A_1 < A_2 \text{ ó } A_1 > A_2$$

Las demostraciones de las propiedades de los números reales definidos a partir de cortaduras pueden ser consultadas con mayor detalle en [28].

De acuerdo con lo anterior, se tiene que el conjunto de todas las cortaduras tiene una estructura algebraica isomorfa a $\mathbb{Q}$. Sin embargo, hace falta establecer el aspecto por el cual se generó la construcción a partir de cortaduras y es la completitud (continuidad).

La idea de continuidad formulada por Dedekind se presenta en [23] y [33] de la siguiente manera:

> "Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esa partición de todos los puntos en dos clases, ese corte de la recta en dos partes".

Con lo anterior al conjunto de todas las cortaduras (racionales e irracionales) se le llama el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ que con las operaciones de suma, producto, la relación de orden y la completitud tiene estructura de ***cuerpo ordenado y completo***.

Para finalizar se resalta que la idea de continuidad de Dedekind es equivalente al principio del supremo, con el que en la actualidad se presenta el axioma de completitud y que se abordará más adelante.

4.3.2. El trabajo de Georg Cantor

La construcción de los números reales por parte de Cantor (1845-1918) está relacionada con los conjuntos infinitos. De acuerdo con [31] inicia cuando da solución al problema de la unicidad de la representación de una función por medio series trigonométricas. En relación con los números reales Cantor presenta dos tipos, el encaje de intervalos y las sucesiones fundamentales.

Los números reales por sucesiones fundamentales

Cantor toma como punto de partida lo que él llama sucesiones fundamentales, las cuales son sucesiones de números racionales que cumplen la propiedad de ser sucesiones de Cauchy.

Definición: una sucesión de números $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se llama fundamental o de Cauchy, si para todo $\epsilon > 0$, existe un número N tal que si m y n son mayores que N se tiene que $|a_n - a_m| < \epsilon$.[33]

Sin embargo, existen sucesiones fundamentales que no son convergentes en el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$). Cantor se propone determinar un conjunto en el que toda sucesión fundamental sea convergente a un elemento de dicho conjunto.

Inicialmente se define cuando una sucesión fundamental es nula.

Definición: una sucesión fundamental es nula si converge a cero.

$$(\forall\epsilon > \mathbb{Q}^{+})(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ tal que si } n > n_0 \longrightarrow |a_n| < \epsilon$$

Luego, se determina cuándo dos sucesiones fundamentales son equivalentes "$\sim$", es decir, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \sim \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, para realizarlo, define el conjunto "$\mathbb{S}$", de sucesiones fundamentales y establece que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes si la sucesión $\{A_n - B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula. De acuerdo con [1] la relación anterior es una relación de equivalencia.

Ahora, si se denota por $\left(\frac{\mathbb{S}}{\sim}\right)$ al conjunto cociente formado por todas las sucesiones equivalentes a $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y por $\lfloor\{A_n\}\rfloor$ a un elemento de dicho conjunto las operaciones básicas de adición y multiplicación se definen como:

La **adición** se define

$$\lfloor\{A_n\}\rfloor + \lfloor\{B_n\}\rfloor = \lfloor\{A_n + B_n\}\rfloor$$

y es cerrada, conmutativa, asociativa, modulativa en la que el módulo de la adición corresponde a la sucesión constante 0 y tiene opuestos. En este caso la sucesión opuesta a $\{A_n\}$ es $\{-A_n\}$, las demostraciones de estas propiedades pueden cer consultadas en [1] y [25].

La **multiplicación** se define

$$\lfloor\{A_n\}\rfloor \cdot \lfloor\{B_n\}\rfloor = \lfloor\{A_n \cdot B_n\}\rfloor$$

Es cerrada, conmutativa, asociativa y modulativa en la que el módulo de la multiplicación corresponde a la sucesión constante 1, tiene elemento inverso es decir que para la sucesión $\{A_n\}$ se establece una sucesión $\left\{\frac{1}{A_n}\right\}$ y es distributiva con respecto a la adición como se muestra en [1] y [25].

Luego de definir las operaciones de adición y multiplicación entre los elementos de las clases de equivalencia, se establece cuándo una sucesión es positiva (mayor que cero) y se establece una relación de orden.

Una clase positiva se define en [29] así:

$\lfloor\{A_n\}\rfloor$ *es positiva si existe* $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{Q}$ *y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n > \delta > 0$ *para* $n > n_0$.

Con lo anterior se establece que una sucesión fundamental tiene sus términos positivos desde un número n y se caracterizan las sucesiones negativas como el cambio de sentido de la desigualdad.

La relación de orden se define

$$\lfloor\{A_n\}\rfloor \leq \lfloor\{B_n\}\rfloor \text{ si la sucesión } \lfloor\{B_n - A_n\}\rfloor \text{ es positiva o nula.}$$

Esta relación de orden es una relación de orden total [1].

Teniendo en cuenta lo anterior se tiene la definición de número real dada en [1].

Definición: al conjunto cociente $\left(\dfrac{\mathbb{S}}{\sim}\right)$ *se le llama conjunto de los número reales y se designa por* $\mathbb{R}$.

Finalmente, se establece que *el conjunto de los números reales definido a partir de sucesiones fundamentales es un cuerpo ordenado*. Para determinar que toda sucesión fundamental converge en los números reales se establece la completitud por medio del siguiente teorema cuya demostración puede ser consultada en [25].

Teorema: el cuerpo $\mathbb{R}$ *es completo, o sea, toda sucesión fundamental en* $\mathbb{R}$ *tiene límite en* $\mathbb{R}$.

Al igual que con el axioma de completitud de Dedekind se tiene que el teorema anterior es equivalente al principio del supremo, que se aborda a continuación en la presentación de $\mathbb{R}$ por medio de axiomas.

Los números reales a partir del encaje de intervalos

De acuerdo con Sánchez en [38] la construcción del conjunto de los números reales por el método de encaje de intervalos está basada en la construcción que hizo Cantor en 1874 de que el conjunto de los números reales no es enumerable. Para realizar dicha demostración se inicia suponiendo que $\mathbb{R}$ es numerable, es decir, que puede establecerse una correspondencia biunívoca de $\mathbb{R}$ con $\mathbb{N}$, por lo que los números reales se pueden colocar en una lista

$w_1, w_2, w_3, ...$ Entonces dado un intervalo cerrado $[a, b]$ es posible encontrar un número real A que no está en la sucesión $\{W_n\}$, los detalles de esta demostración pueden ser consultados en [38].

Para construir los números reales por el método de encaje de intervalos se inicia definiendo como monótonas contíguas a dos sucesiones infinitas de números racionales $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ que cumplen las siguientes condiciones.

- $\{A_n\} = a_1, a_2, ...a_n$ es monótona creciente.
  $\{B_n\} = b_1, b_2, ...b_n$ es monótona decreciente.
- Todo elemento de $\{A_n\}$ es menor que cualquier elemento de $\{B_n\}$, es decir:

$$a_n < b_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

- La longitud del intervalo $(b_n - a_n)$ es menor que cualquier $\epsilon > 0$ a partir de un cierto indice i suficientemente grande.

De acuerdo con lo anterior, las sucesiones $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ denotan una sucesión de intervalos encajados.

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n], ... \tag{4.12}$$

Y que se representan en la siguiente figura.

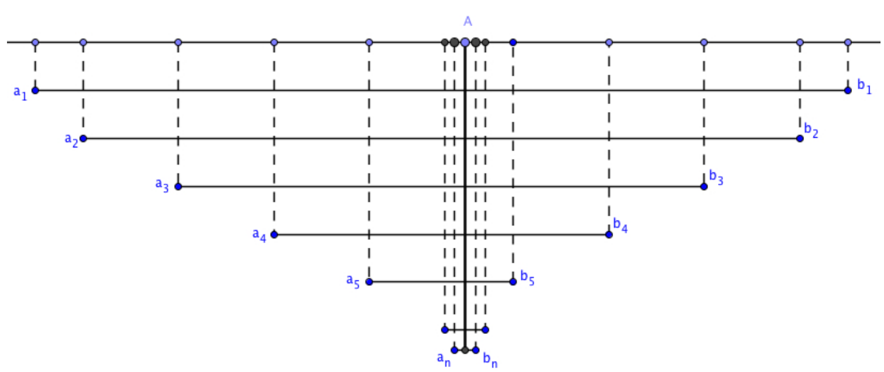


Figura 4.19: Sucesiones de intervalos.

En la figura anterior se observa que cada intervalo está contenido en el anterior, esto es:

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$$

Finalmente se tiene que las longitudes de los intervalos llegan a ser tan pequeñas como se quiera.

Por otra parte, se tiene que *no todas sucesiones de números racionales son convergentes en los números racionales.*

Por ejemplo: suponga que se va a encerrar por medio de intervalos el número $\sqrt{3}$, que puede determinarse por los intervalos

$$[1,2],[1,7\ ,\ 1,8],[1,73\ ,\ 1,74],[1,732\ ,\ 1,733],...$$

Y cuya representación es:

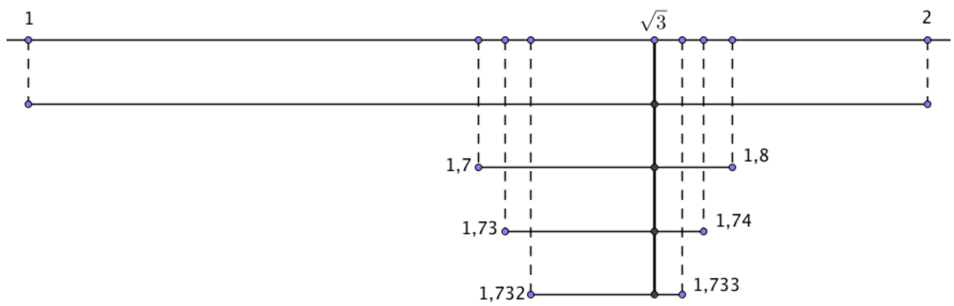


Figura 4.20: Intervalos que encierran a $\sqrt{3}$

dichas sucesiones no convergen a un número racional pues como se conoce $\sqrt{3}$ es un número irracional. Por lo tanto, se busca construir un nuevo conjunto en el que toda sucesión de racionales sea convergente.

Para esto se tiene que el número $\sqrt{3}$, se puede generar por medio de otras dos sucesiones C_n y D_n de números racionales cuyos encajes de intervalos son:

$$[c_1,d_1],[c_2,d_2],...,[c_n,d_n],... \tag{4.13}$$

Como por ejemplo $[1,5\ ,\ 2],[1,6\ ,\ 1,9],[1,7\ ,\ 1,8],[1,71\ ,\ 1,79],...$, con los que también se determina al número $\sqrt{3}$.

Por lo que inicialmente se establece la equivalencia entre encajes de intervalos para aquellos que determinan el mismo número.

Definición: dos encajes de intervalos son equivalentes si cada extremo inferior de uno de ellos es menor o igual que el extremo superior del otro, es decir

$$a_i \leq d_j\ ,\ b_i \leq c_j \tag{4.14}$$

para cualquier par de índices i y j.

De acuerdo con [40], se concluye que la equivalencia entre encaje de intervalos (4.12) y (4.13), que cumplen la condición (4.14) es una relación de equivalencia y determina una partición del conjunto de encajes de intervalos en clases de equivalencia. Por lo que se define un número real como una clase de equivalencia de encaje de intervalos.

Definición: Un número real A, es una clase de equivalencia de encaje de intervalos racionales como (4.11) y (4.12) respecto de la relación de equivalencia definida por la condición (4.13).

Luego se definen las operaciones de adición y multiplicación a partir del encaje de intervalos y que se mantiene para las clases de equivalencia.

Adición:

Sea A un número real determinado por el encaje de intervalos $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n], ...$ y B un número real determinado por el encaje de intervalos $[c_1, d_1], [c_2, d_2], ..., [c_n, d_n], ...$, entonces la suma de A y B, denotada $A + B$ es

$$[a_1 + c_1, b_1 + d_1], [a_2 + c_2, b_2 + d_2], ..., [a_n + c_n, a_n + d_n], ...$$

Multiplicación:

Sea A un número real determinado por el encaje de intervalos $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n], ...$ y B otro número real determinado por el encaje de intervalos $[c_1, d_1], [c_2, d_2], ..., [c_n, d_n], ...$, entonces el producto de A y B, denotada $A \cdot B$ es

$$[a_1 \cdot c_1, b_1 \cdot d_1], [a_2 \cdot c_2, b_2 \cdot d_2], ..., [a_n \cdot c_n, a_n \cdot d_n], ...$$

Luego para definir la relación de orden inicialmente se definen los números reales como positivos, negativos o el número cero.

- Un número real A determinado por el encaje de intervalos $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n], ...$ se llama *positivo* y se denota como $A > 0$, si $a_n > 0$ para algún n.
- Un número real A determinado por el encaje de intervalos $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n], ...$ se llama *negativo* y se denota como $A < 0$, si $b_n > 0$ para algún n.
- Si no se da ninguno de los casos anteriores $A = 0$.
- El número A se llama *no negativo* si $a \geq 0$, si $A > 0$ ó $A = 0$.

Finalmente, se define la relación de orden como:

Sea A un número real determinado por el encaje de intervalos $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n], ...$ y B un número real determinado por el encaje de intervalos $[c_1, d_1], [c_2, d_2], ..., [c_n, d_n], ...$, la relación "$A \leq B''$, A menor o igual que B, se tiene si existe un número real $C \geq 0$ determinado por el encaje de intervalos $[e_1, f_1], [e_2, f_2], ..., [e_n, f_n], ...$, tal que

$$A + C = B$$

Por lo que el conjunto de los números reales queda definido a partir de las clases de equivalencia de intervalos encajados, con las operaciones de adición y multiplicación y la relación de orden. Las propiedades que cumplen las clases de equivalencia de intervalos encajados son las mismas que las de los números reales y pueden ser consultadas en [1].

La completitud del conjunto de los números reales definidos a partir del encaje de intervalos se presenta a continuación.

Principio de intervalos encajados: *Sea* $[I_n]_{n\in\mathbb{N}}$ *una familia de intervalos cerrados, tal que.*

1. $I_{n+1} \subset I_n$

2. Dado $\epsilon > 0$ existe un número natural n tal que la longitud de I_n es menor que ϵ.

Entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = x, \ \textit{para algún } x \textit{ en } \mathbb{R}$$

Con lo que se garantiza que el conjunto de los números reales definido a partir de las clases de equivalencia de intervalos encajados con las operaciones de adición, multiplicación y la relación de orden, forman un *grupo ordendo completo.*

4.4. Definición axiomática de los números reales

La presentación de los números reales a partir de axiomas es hecha por D. Hilbert (1862-1943) de acuerdo con [22] en una conferencia en 1899 y tal caracterización estaba basaba en los axiomas para el "conjunto de números complejos", presentados por él mismo pocos meses antes, en la primera edición de *Fundamentos de la geometría.*

Hilbert utiliza tres grupos de axiomas para definir los números reales, los algebraicos, los de orden y el de completitud. La presentación que se hace a continuación está basada en [24].

- Axiomas algebraicos (cuerpo).

- Axiomas de orden.

- Axioma de completitud

Sea $\mathbb{R}$ un conjunto diferente de vacío que se llama el conjunto de los números reales. Se definen las operaciones de adición "+" y multiplicación "·".

Adición: a cada par de números reales x y y se les asocia un número real, denotado $x+y$, llamado suma de x y y.

$$(x, y) \mapsto x + y$$

Multiplicación: a cada par de números reales x y y se les asocia un número real, denotado $x \cdot y$, llamado el producto de x y y.

$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

Las operaciones anteriores son cerradas, es decir, que el resultado de ellas pertenece al conjunto del cual se utilizaron los elementos. En este caso se dice que las operaciones están bien definidas.

4.4.1. Axiomas algebraicos

Para la adición de números reales:

A.1 Asociatividad
Para todo x, y y $z \in \mathbb{R}$, se tiene que $(x + y) + z = x + (y + z)$

A.2 Elemento neutro
Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 + x = x + 0 = x$, Para todo $x \in \mathbb{R}$.

A.3 Elemento opuesto
Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un elemento $k \in \mathbb{R}$, tal que $x + k = k + x = 0$

A.4 Conmutatividad
Para todo x y $y \in \mathbb{R}$, se tiene que $x + y = y + x$

Para la multiplicación de números reales

A.5 Asociatividad
Para todo x, y y $z \in \mathbb{R}$, se tiene que $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

A.6 Elemento neutro
Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, Para todo $x \in \mathbb{R}$.

A.7 Elemento inverso
Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un elemento $j \in \mathbb{R}$, tal que $x \cdot j = j \cdot x = 1$

A.8 Conmutatividad
Para todo x y $y \in \mathbb{R}$, se tiene que $x \cdot y = y \cdot x$

Por otra parte las operaciones de adición y multiplicación se relacionan con:

A.9 Distributividad
Para todo x, y y $z \in \mathbb{R}$, se tiene que $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Un conjunto con dos operaciones como + y ·, que cumplen los anteriores axiomas se dice que es un *cuerpo* y a los axiomas anteriores se les llama *axiomas de cuerpo*[14].

A continuación, se muestra que los conjuntos de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no son *cuerpos*, para esto se presentan ejemplos de los axiomas que no se cumplen.

- Para el conjunto de los números naturales se tiene que no se cumplen los axiomas.

  A.3 Elemento opuesto.
  Sean $x, y \in \mathbb{N}$ entonces $x + k = 0$
  Ejemplo:

$$\begin{gathered} \text{Sea } 3 \in \mathbb{N} \\ 3 + k = 0 \\ \cancel{3} + k - \cancel{3} = 0 - 3 \\ k = -3 \\ -3 \notin \mathbb{N} \end{gathered}$$

  A.7 Elemento inverso.

  Sean $x, y \in \mathbb{N}$ entonces $x \cdot j = 1$
  Ejemplo:

$$\begin{gathered} \text{Sea } 5 \in \mathbb{N} \\ 5 \cdot j = 1 \\ \frac{\cancel{5} \cdot j}{\cancel{5}} = \frac{1}{5} \\ j = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \notin \mathbb{N} \end{gathered}$$

  Por lo tanto el conjunto de los número naturales $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ no es cuerpo.

- Para el conjunto de los números enteros se tiene que no se cumplen el axioma.

  - Elemento Inverso.
    Sea $x, j \in \mathbb{Z}$ entonces $x \cdot j = 1$
    Ejemplo:

$$\begin{gathered} \text{Sea } -7 \in \mathbb{Z} \\ -7 \cdot j = 1 \\ \frac{\cancel{-7} \cdot j}{\cancel{-7}} = -\frac{1}{7} \end{gathered}$$

$$j = -\frac{1}{7}$$
$$-\frac{1}{7} \notin \mathbb{Z}$$

Por lo tanto el conjunto de los número naturales $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ no es cuerpo.

Finalmente, se puede probar que el conjunto de los números racionales es un cuerpo.

Por otra parte, utilizando el conjunto de axiomas de cuerpo se puede demostrar algunas propiedades relevantes (teoremas) de los números reales; a continuación se muestran algunas de ellas como: la distributividad de la multiplicación con respecto a la sustracción, la sustracción de números racionales y la diferencia de cuadrados, entre otros. Sin embargo, si se quiere realizar un estudio más detallado se puede consultar el capítulo I de [14].

Teorema: Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ *y* $a + b = a + c$ *entonces* $b = c$

Demostración: Por el axioma A.3, se garantiza que dado a existe k tal que $a + k = k + a = 0$, por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} (a+b)+k &= (a+c)+k \\ k+(a+b) &= k+(a+c) \\ (k+a)+b &= (k+a)+c \\ 0+b &= 0+c \\ b &= c \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ∎

En el caso de la multiplicación se tiene el mismo teorema, sin embargo, es necesario que $a \neq 0$ de lo contrario b y c podrían ser diferentes, luego el teorema se enuncia así:

Teorema: Si $a, b, c \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$ *y* $a \cdot b = a \cdot c$ *entonces* $b = c$

Demostración: Por el axioma A.7, se garantiza que dado a existe j tal que $a \cdot j = 1$, por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a \cdot c \\ (a \cdot b) \cdot j &= (a \cdot c) \cdot j \\ j \cdot (a \cdot b) &= j \cdot (a \cdot c) \\ (j \cdot a) \cdot b &= (j \cdot a) \cdot c \\ 1 \cdot b &= 1 \cdot c \\ b &= c \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

La aplicación de estos dos teoremas se da especialmente en los procedimientos algebraicos cuando se eliminan términos semejantes.

Teorema: Distributividad de la multiplicación con respecto a la sustracción. Es decir:

$$\text{Para todo } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Para realizar esta demostración es necesario utilizar los siguientes teoremas: Teorema 1.6: Para todo a y $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $a - b = a + (-b)$, Teorema 1.9: Para todo a y $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$, cuyas demostraciones pueden ser consultadas en las páginas 10 y 11 de [14].

Demostración:

Teniendo en cuenta el teorema 1.6 citado antes, la expresión $a \cdot (b - c)$ se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} a \cdot (b - c) = a \cdot (b + (-c)) \\ a \cdot (b + (-c)) = a \cdot b + a \cdot (-c) \\ a \cdot b + a \cdot (-c) = a \cdot b + (-c) \cdot a \\ a \cdot b + a \cdot (-c) = a \cdot b - (c \cdot a) \\ a \cdot b - (c \cdot a) = a \cdot b - (a \cdot c) \\ a \cdot (b - c) = a \cdot b - (a \cdot c) \end{gathered}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

A continuación, se presenta la distributividad de la multiplicación respecto a la sustracción, la distributividad con respecto a la adición puede ser consultada en [14].

Teorema: Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *y* $b \cdot d \neq 0$ *entonces*

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot c}{b \cdot d}$$

Para demostrar este teorema es necesario enunciar la siguiente definición.

Definición: Si $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a \neq 0$ *entonces* $\dfrac{b}{a} = b \cdot a^{-1}$,
Con esta información se procede así:

Demostración:
Por el axioma A.6 (elemento neutro), se tiene

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) \cdot 1$$

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\cdot 1=\left[\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right]\cdot[(b\cdot d)\cdot(b\cdot d)^{-1}]$$

$$[(a\cdot b^{-1})-(c\cdot d^{-1})]\cdot[(b\cdot d)\cdot(b\cdot d)^{-1}]$$

$$[(a\cdot b^{-1})-(c\cdot d^{-1})\cdot(b\cdot d)]\cdot[(b\cdot d)^{-1}]$$

$$[(a\cdot b^{-1})\cdot(b\cdot d)-(c\cdot d^{-1})\cdot(b\cdot d)]\cdot[(b\cdot d)^{-1}]$$

$$[(a\cdot \cancel{b}^{-1})\cdot(\cancel{b}\cdot d)-(c\cdot \cancel{d}^{-1})\cdot(b\cdot \cancel{d})]\cdot[(b\cdot d)^{-1}]$$
$$[(a\cdot d)-(c\cdot b)]\cdot[(b\cdot d)^{-1}]$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{(a\cdot b)-(c\cdot b)}{b\cdot d}$$

que es lo que se buscaba demostrar.■

El último teorema que se demostrará está relacionado con la diferencia de cuadrados, temática importante en las matemáticas escolares. A continuación se presenta.

Teorema: Para todo a y $b \in \mathbb{R}$, se tiene que $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Demostración:
Si a ó b es cero, el procedimiento se reduce a determinar el cuadrado de un número de acuerdo con los signos.

En el caso que $a\neq 0$ y $b\neq 0$ se tiene que probar que a^2-b^2 entonces $(a+b)(a-b)$ y $(a+b)(a-b)$ entonces a^2-b^2.

1. Para a^2-b^2 entonces $(a+b)(a-b)$.
   Demostración:

$$\begin{aligned} a^2-b^2&=a^2-b^2+0\\ &=a^2-b^2+[(a\cdot b)-(a\cdot b)]\\ &=a^2+(a\cdot b)-b^2-(a\cdot b)\\ &=a\cdot(a+b)-b(a+b)\\ &=(a+b)\cdot(a-b)\end{aligned}$$

2. Para $(a+b)(a-b)$ entonces a^2-b^2

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b)&=(a+b)\cdot a-(a+b)\cdot b\\ &=a^2+a\cdot b-a\cdot b-b^2\\ &=a^2-b^2\end{aligned}$$

Por 1. y 2. se tiene que $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ que es lo que se quería demostrar.■

4.4.2. Axiomas de orden

Para estos axiomas se define el subconjunto $\mathbb{R}^+$, llamado el conjunto de los reales positivos.

A.10 Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $x \in \mathbb{R}^+$, o $x = 0$, o $-x \in \mathbb{R}^+$ y estas tres posibilidades son excluyentes entre sí.

A.11 Si x y $y \in \mathbb{R}^+$ entonces $x + y \in \mathbb{R}^+$ y $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.

Como consecuencia de los axiomas anteriores se tiene que para dos números en el conjunto de los números reales, estos se pueden comparar [14], para compararlos se introduce la definición de desigualdad.

Definición: sean a y $b \in \mathbb{R}^+$ entonces se introduce el símbolo "$<$" para compararlos, es decir $a < b$, al leerlo de izquierda a derecha se lee a menor que b, al leerlo de derecha a izquierda b mayor que a. Si $(b - a) \in \mathbb{R}^+$

Es importante resaltar que los símbolos $<$ y $>$ permiten comparar números, en el caso de comparar números que puedan ser iguales se tiene los símbolos que leidos de izquierda a derecha son $\leq$ (menor o igual) y $\geq$ (mayor o igual).

Utilizando la definición anterior y los axiomas enunciados hasta aquí, se tienen algunos resultados importantes relacionados con las desigualdades como la propiedad transitiva de la desigualdad, la propiedad de la tricotomía, la monotonía de la adición y la multiplicación, entre otros.

Teorema: (propiedad transitiva) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

Demostración:
Por el enunciado se tiene que $a < b$ y $b < c$ por lo tanto por la definición de desigualdad se tiene entonces que

$$b - a \in \mathbb{R}^+ \text{ y } c - b \in \mathbb{R}^+$$

Como la operación de adición es cerrada, entonces

$$\begin{gathered}(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+ \\ c - a \in \mathbb{R}^+ \\ a < c\end{gathered}$$

Que es lo que se quería demostrar. ∎

Teorema: (propiedad de la tricomía) Si a y $b \in \mathbb{R}^+$ entonces se tiene una y sólo una de las siguientes situaciones:

$$a < b, \ a > b \text{ ó } a = b$$

Demostración:
Suponga que se tiene $a - b \in \mathbb{R}^+$. De acuerdo con el axioma A.10, se tiene una de las siguientes opciones:

$$a - b \in \mathbb{R}^+, \ a - b = 0 \text{ ó } -(a - b) \in \mathbb{R}^+$$

como $-(a - b) = b - a$ y $a - b = 0$ implica que $a = b$, se tiene que

$$a - b \in \mathbb{R}^+, \ a = b \text{ ó } b - a \in \mathbb{R}^+$$

y de manera equivalente se tiene entonces que

$$b < a \in \mathbb{R}^+, \ a = b \text{ ó } a < b \in \mathbb{R}^+$$

Que es lo que se quería mostrar.■

Teorema: (monotonía de la adición) Si $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ y $a < b$ entonces $a + c < b + c$

Demostración: Por la definición de desigualdad se tiene

$b - a \in \mathbb{R}^+$ Por el axioma A.2, elemento neutro, la expresión anterior se puede reescribir

$$\begin{gathered} \text{como } (b - a) + 0 \in \mathbb{R}^+ \\ [(b - a) + (c + (-c))] \in \mathbb{R}^+ \\ [(b + c) + (-a - c)] \in \mathbb{R}^+ \\ [(b + c) + (-1) \cdot (a + c)] \in \mathbb{R}^+ \\ (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+ \\ a + c < b + c \end{gathered}$$

que es lo que se quería demostrar.■

Teorema:(Monotonía de la multiplicación) Si $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ se tiene que

$$\begin{gathered} \text{Si } a < b \text{ y } c < 0 \text{ entonces } a \cdot c < b \cdot c \\ \text{Si } a < b \text{ y } c > 0 \text{ entonces } a \cdot c > b \cdot c \end{gathered}$$

Demostración:
Para el primer caso cuando $c > 0$.
Utilizando la definición de desigualdad para la expresión $a < b$ se tiene que

$$\begin{gathered} b - a \in \mathbb{R}^+ \\ (a - b) \cdot c \in \mathbb{R}^+ \\ (a \cdot c) + (-b \cdot c) \in \mathbb{R}^+ \\ (a \cdot c) - (b \cdot c) \in \mathbb{R}^+ \\ a \cdot c < b \cdot c \end{gathered}$$

que es lo que se quería demostrar.■

Para el segundo caso cuando $c < 0$ se tiene que $-c \in \mathbb{R}^+$.
Utilizando la definición de desigualdad para la expresión $a < b$ se tiene que

$$b - a \in \mathbb{R}^+$$

Luego por el teorema de distributividad de la multiplicación con respecto a la sustracción se tiene que

$$\begin{gathered}
(a - b) \cdot (-c) \in \mathbb{R}^+ \\
(a \cdot (-c)) + (-b \cdot (-c)) \in \mathbb{R}^+ \\
-(a \cdot c) + (b \cdot c) \in \mathbb{R}^+ \\
(b \cdot c) - (a \cdot c) \in \mathbb{R}^+ \\
b \cdot c < a \cdot c \\
a \cdot c > b \cdot c
\end{gathered}$$

que es lo que se quería demostrar.■

La aplicación de estos teoremas y los axiomas permiten dar solución a inecuaciones lineales como por ejemplo:

Determinar el conjunto solución de

$$5 \cdot x + 8 < 10$$

Solución:
Por la monotonía de la adición se tiene que

$$\begin{gathered}
5 \cdot x + 8 + (-8) < 10 + (-8P) \\
5 \cdot x + (8 + (-8)) < 10 + (-8P) \\
5 \cdot x + 0 < 2) \\
5 \cdot x < 2 \\
\frac{1}{5} \cdot 5 \cdot x < \frac{1}{5} \cdot 2 \\
\left(\frac{1}{5} \cdot 5\right) \cdot x < \tfrac{1}{5} \cdot 2 \\
x < \frac{2}{5}
\end{gathered}$$

con lo que se concluye que todos los números que sean menores que $\dfrac{2}{5}$ son la solución de dicha inecuación.

La representación en la recta numérica es
Para el caso de las inecuaciones cuadráticas o las que involucran el valor absoluto, se debe introduccir “ley de los signos” donde se debe tener en cuenta cuando los valores son

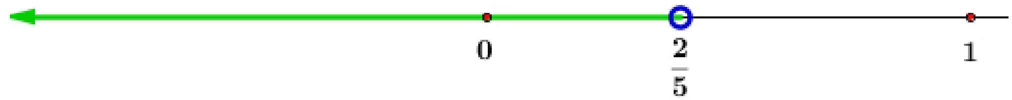


Figura 4.21: Conjunto Solución de la inecuación $5 \cdot x + 8 < 10$.

positivos o negativos, como lo presenta Dueñas en [14]. páginas 18 y 19.

Para finalizar en la imagen anterior se ha representado el conjunto solución de la inecuación $5 \cdot x + 8 < 10$. Sin embargo, no se ha garantizado que la recta se continua, lo cual generó inconvenientes como se mostró antes. Es por eso que se introduce el siguiente axioma con el que se establece una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales de manera que el inconveniente de la continuidad se soluciona.

4.4.3. Axioma de completitud

Para presentar este axioma es necesario introducir antes algunas definiciones de manera previa, como se hace en [1].

Definición:Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.

I) *Un elemento $d \in \mathbb{R}$ se dice cota superior de A en $\mathbb{R}$, si para todo $x \in A$ se cumple que $x \leq d$.*
Si existe una cota superior de A en $\mathbb{R}$ se dice que A es un conjunto acotado superiormente.

II) *Un elemento $c \in \mathbb{R}$ se dice cota inferior de A en $\mathbb{R}$, si para todo $x \in A$ se cumple que $c \leq x$.*
Si existe una cota inferior de A en $\mathbb{R}$ se dice que A es un conjunto acotado inferiormente.

III) *Se dice que A es un conjunto acotado si posee una cota superior y una cota inferior en $\mathbb{R}$.*

Definición: Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

- Un elemento $k \in \mathbb{R}$ se dice extremo superior o supremo de A en $\mathbb{R}$ si:
  1. Para todo $x \in A$ se verifica que $x \leq k$.
  2. Para todo $k' \in \mathbb{R}$ con $k' > k$ existe $x_0 \in A$ tal que $x_0 < h'$.
- Un elemento $h \in \mathbb{R}$ se dice extremo inferior o ínfimo de A en $\mathbb{R}$ si:

1. Para todo $x \in A$ se verifica que $h \leq x$.
2. Para todo $h' \in \mathbb{R}$ con $h < h'$ existe $x_0 \in A$ tal que $x_0 < h'$.

A.13 **Principio del supremo:** Todo conjunto no vacío de números reales que está acotado superiormente, tiene supremo. Todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene ínfimo.

4.5. Representaciones de los números reales

El conjunto de los números reales puede ser presentado de diferentes maneras, entre las que se encuentran: las fracciones continuas, la definición axiomática, la recta numérica para los números constructibles, la representación decimal, entre otras, siendo la definición axiomática, la que más se utiliza en educación secundaria. Sin embargo, como se menciona en los antecedentes, una de las dificultades que presentan los estudiantes en relación con la definición axiomática es que esta implica un alto grado de abstracción que los estudiantes en algunas ocasiones no alcanzan y conlleva errores al momento de abordar los algoritmos de las operaciones con estos números.

Por tal razón, en esta sección se abordan las construcciones con regla y compás como una herramienta que le permite al estudiante "interacturar" con el objeto de estudio y con las que se pretende aproximar al estudiante a concluir que si se llama K al conjunto de los números que se pueden construir con la regla y el compás, se tiene que:

$$K \subset \mathbb{R}$$

Ya que hay números reales que no se pueden representar con estos instrumentos es necesario complementar ésta representación, de manera que se pueda representar cualquier número real. Por lo que se aborda su representación en el sistema decimal.

4.5.1. El grupo de las construcciones con la regla y el compás (Los números constructibles)

Sea K el conjunto de los números que se pueden construir con la regla y el compás. Entonces, como se mostró en la sección anterior $K \neq \emptyset$, dado que los números $3, \frac{3}{4}, \sqrt{2}$ entre otros se pueden construir con estos instrumentos, luego están en K. Es importante recordar que los números que se pueden construir con la regla y el compás son aquellos que dan solución a una ecuación cuyo exponente es una potencia de 2, cuando se enunció el Teorema de Wantzel.

Por otra parte se tiene que:

Si α y $\beta \in K$ entonces:

- $\alpha + \beta \in K$.

- Si $\alpha \geq \beta$, entonces $\alpha - \beta \in K$.
- $\alpha \cdot \beta \in K$.
- $\alpha \div \beta = \dfrac{\alpha}{\beta} \in K$, si $\beta \neq 0$.

Luego las cuatro operaciones son cerradas en K.

Con respecto a la **adición** se tiene que:

1. Es conmutativa: para todo $\alpha, \beta \in K$ se tiene que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
2. Es asociativa: para todo α, β y $\omega \in K$ se tiene que $\alpha + (\beta + \omega) = (\beta + \alpha) + \omega$.
3. Tiene elemento neutro: existe un elemento $0 \in K$ tal que $0 + \alpha = \alpha + 0 = x$.
   En este caso 0 corresponde al punto de partida de los segmentos.
4. Tiene elemento opuesto: para todo $\alpha \in K$, existe un elemento $\lambda \in K$, tal que $\alpha + \lambda = \lambda + \alpha = 0$, en este caso λ tiene la misma medida de α.

Con respecto a **la multiplicación** se tiene que:

1. Es conmutativa: para todo $\alpha, \beta \in K$ se tiene que $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
2. Es asociativa: para todo α, β y $\omega \in K$ se tiene que $\alpha \cdot (\beta \cdot \omega) = (\beta \cdot \alpha) \cdot \omega$.
3. Tiene elemento neutro: existe un elemento $1 \in K$ tal que $1 \cdot \alpha = \alpha + 0 = x$,en este caso 1 corresponde la unidad de medida de los segmentos.
4. Tiene elemento opuesto: para todo $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ existe un elemento $\frac{1}{\alpha} \in K$, tal que $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$, en este caso la existencia $\frac{1}{\alpha}$ está garantizada por la división de segmentos.
5. Es distributiva con respecto a la adición: para todo α, β y $\omega \in K$ se tiene que

$$\alpha \cdot (\beta + \omega) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \omega)$$

De acuerdo con esto, se tiene que el conjunto K de los número constructibles tiene estructura algebraica de grupo. Sin embargo, como se presentó anteriormente existen números reales que no se pueden representar usando regla y compás como $\sqrt[3]{2}$, por lo que con esta representación sólo se pueden representar algunos números algebraicos[5] y no se puede representar ningún número trascendente[6] como π y e. Por lo tanto

$$K \subset \mathbb{R}$$

Por lo que se hace necesario utilizar otro tipo de representación distinta que sea más completa, es decir, que permita representar cualquier número decimal.

[5]Los números algebraicos son aquellos números reales que son raíces de una ecuación de la forma $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = 0$ en la que los coeficientes a_i son números racionales [4].

[6]Los números trascendentes son aquellos números reales que no son raíces de ecuaciones con coeficientes racionales [4].

4.6. Expansión decimal de un número real

En el sistema de numeración decimal, todo número real m se puede expresar como

$$x = a_0, a_1a_2a_3a_4a_5a_6...a_n \tag{4.15}$$

Donde a_0 se denomina la parte entera, a_k, $k = 1, 2, ...$, es un número entre 0 y 9 que se denomina dígito.

Multiplicando la expresión 4.21 por 10^n se tiene

$$10^n \cdot x = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + ... + a_n$$

Despejando x y simplificando

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... \frac{a_n}{10^n}$$

Por tanto

$$x = a_0 + \sum_{n=1}^{n} \frac{a_n}{10^n}$$

Donde $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ es una serie geométrica.

Por otra parte, en el estudio de las expansiones decimales se tiene que:

- Todo número real m tiene expansión decimal.
- Existen números reales que no tienen una única expansión decimal.

En relación con el primer enunciado partimos de:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

En relación con el conjunto $\mathbb{Q}$, se tiene que todo número racional es el cociente de dos enteros, realizando la división usual se obtiene que la representación decimal es finita o periódica infinita.

Ejemplo:
Representación decimal finita.

$$\frac{1}{2} = 0,5 \text{ y } \frac{25}{4} = 6,25$$

Representación decimal infinita, como el caso de:

$$\frac{1}{3} = 0,3333... \text{ y } \frac{24}{11} = 2,454545...$$

Y en el caso del conjunto $\mathbb{I}$ se tiene que la representación decimal siempre es infinita no periódica.

Ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1,414113562...$$

Para el segundo enunciado se tiene por ejemplo el caso de $0,\overline{9} = 1$.

Sea

$$x = 0,\overline{9} \tag{4.16}$$

Multiplicando (5,18) por 10 se tiene:

$$10x = 9,\overline{9} \tag{4.17}$$

$$\begin{array}{r} 10x = 9,\overline{9} \\ -x = -0,\overline{9} \\ \hline 9x = 9. \end{array}$$

Y despejando x se obtiene:

$$x = 1.$$

Otro aspecto de las expansiones decimales es que al considerar inicialmente la recta numérica, con la marcación de los números enteros:

Un número real m se representará así:

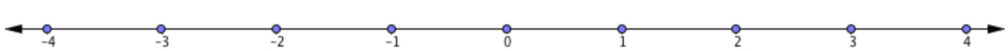


Figura 4.22: Recta numérica.

m está entre dos puntos de la marcación, es decir, existe un número entero a_0 tal que:

$$a_0 < m < a_0 + 1$$

De manera que m pertenece al intervalo cerrado $A_0 = [a_0, a_0 + 1]$, Si se divide el intervalo en diez partes iguales, $a_0 + \frac{1}{10}$, $a_0 + \frac{2}{10}$, ..., $a_0 + \frac{9}{10}$

Entonces m debe pertencer a alguno de los subintervalos cerrados de A_0, lo que quiere decir que existe un dígito a_1 $(0, 1, 2, \ldots 9)$ tal que m pertence al intervalo A_1 dado por:

$$a_0 + \frac{1}{10} \cdot a_1 < m < a_0 + \frac{1}{10} \cdot a_1 + \frac{1}{10}$$

Si se divide una vez más el intervalo A_1 en diez partes iguales, se determina un dígito a_2 tal que el número x se encuentra en el intervalo A_2 dado por:

$$a_0 + \frac{1}{10} \cdot a_1 + \frac{1}{10^2} \cdot a_2 < m < a_0 + \frac{1}{10} \cdot a_1 + \frac{1}{10^2} \cdot c_2 + \frac{1}{10^2}$$

Iterando este procesimiento hasta un n, se tiene que el número m estará en el intervalo A_n dado por la expresión:

$$a_0 + \frac{1}{10} \cdot a_1 + \ldots + \frac{1}{10^n} \cdot a_n < m < a_0 + \frac{1}{10} \cdot a_1 + \ldots + \frac{1}{10^n} \cdot c_n + \frac{1}{10^n}$$

Donde se tiene que a_0, a_1, a_2, a_3, ..., son todos los dígitos. El intervalo A_n tiene longitud $\frac{1}{10^n}$ la cual tiende a cero cuando n crece. Además el número m está dado por el encaje de intervalos y por lo tanto m está determinado de manera única por los A_n [11].

Puesto que los A_n son conocidos, una vez que los números a_0, a_1, a_2, a_3, ... están dados, encontramos que un número real arbitrario puede ser descrito por una sucesión infinita de enteros a_0, a_1, a_2, a_3, ..., donde todos excepto el primero son dígitos entre cero y nueve.

De manera general esto se presenta como:

$$x = a + 0, a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

4.6.1. Aproximación a la representación de un número real utilizando su expansión decimal

De acuerdo con la información de la sección anterior se tiene que si se quisiera representar la expansión decimal de un número real x, ésta dependerá del número de cifras decimales de x. Cuando la representación decimal es finita, la representación se determina en un número finito de pasos. Sin embargo, si la representación decimal es infinita sólo se podrá hacer una aproximación, como se muestra a continuación.

Si se quere representar la expansión decimal del número $x = \dfrac{1}{3} = 0,\overline{3}$.

En el primer paso se tiene que $x = 0,3$, está entre 0 y 1.

En el segundo paso se tiene que $x = 0,33$

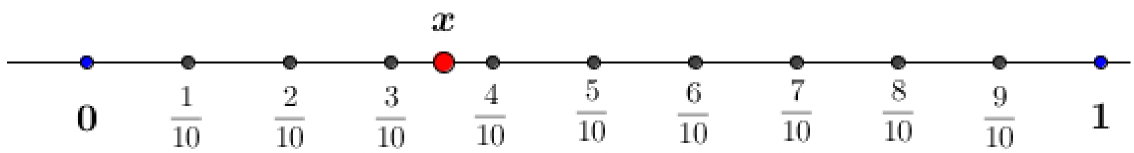


Figura 4.23: Segunda expansión decimal de $\frac{1}{3}$

En un tercer paso se tiene que $x = 0,333$

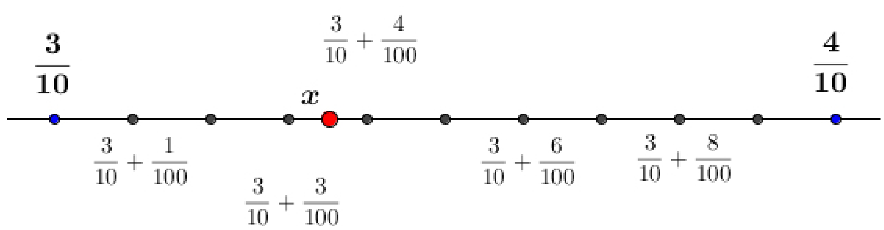


Figura 4.24: Tercera expansión decimal de $\frac{1}{3}$

Dado que el número $x = \dfrac{1}{3}$ tiene una representación decimal infinita las figuras anteriores son una aproximación.

4.7. Conclusiones del capítulo

De los aspectos tratados en este capítulo se tienen las siguientes conclusiones:

En relación con los aspectos históricos y epistemológicos

- Que los griegos asociaran el significado de número a la magnitud de un segmento impidió la posibilidad de representar los números negativos.

- El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables evidencia la necesidad de ampliar el concepto de número, ya no sólo se puede aceptar la representación geométrica de los $\mathbb{N} > 1$ como la magnitud de un segmento.

- El desarrollo del Álgebra en India y Europa promueve que se amplíe el significado de número a otros dominios numéricos distintos de $\mathbb{N}$, lo que permite la aceptación de los números negativos.

- La formalización de $\mathbb{R}$, ya sea por medio de cortaduras, de sucesiones fundamentales o por axiomas, permite establecer la correspondencia (uno a uno) entre los números reales y los puntos de la recta.

En relación con las representaciones de los números reales

- La representación de números reales con regla y compás es limitada, pues no se pueden abordar todos los números reales y con estos instrumentos sólo se pueden representar algunos números algebraicos.

- Por otra parte la representación de números reales en el sistema decimal constituye la mejor manera de aproximarse a los números reales pues con ella se puede representar de mejor manera cualquier número real.

Capítulo 5

Aspectos didácticos

Dentro de este capítulo se presentan aspectos relevantes que se utilizan como puntos de conexión entre el estudio realizado antes (aspectos epistemológicos, históricos y disciplinares) con el diseño, planeación e implementación de la unidad didáctica, centro de este trabajo.

Dentro de los aspectos más destacados están, la traspocisión didáctica, como el que hacer de un docente, las competencias de los estudiantes y el currículo entendido como la estructura bajo la cual es pertinente la enseñanza del conjunto de los números reales en matemáticas escolares.

5.1. La transposición didáctica

La enseñanza de la matemática supone para el docente de educación secundaria un trabajo en el que debe tomar el conocimiento específico de la disciplina que imparte y adaptarlo, transformarlo y presentarlo a sus estudiantes. Este proceso que desarrolla el docente se denomina "transposición didáctica[7]"

Del proceso de transposición didáctica, se resalta que no se puede prescindir de ninguno de los tres agentes. D'Amore en [13] muestra de manera general el papel de cada uno de los integrantes del "triángulo" de la transposición didáctica.

- *El saber*, está constituido por los expertos en la disciplina, quienes estructuran y organizan el saber, de manera que las instituciones para el caso de Colombia (MEN) puedan definir cuál es el saber que se debe enseñar.

- El conocimiento del *estudiante*, puede relevelarse teniendo en cuenta cuatro aspectos, el biológico, el afectivo, el epistemológico y el social.

- *El Docente* se estudia al igual que los estudiantes desde cuatro aspectos, el social, el institucional, el pedagógico y el afectivo.

[7]Para D'Amore en [13] este concepto fue introducido en la didáctica de la matemática por Yves Chevallard en los años 80 en los institutos de investigación en educación matemática de Francia dirigidos por él.

La representación más elemental el proceso se presenta a continuación.

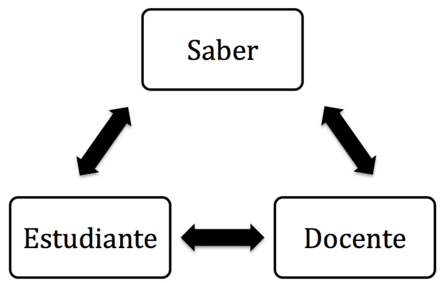


Figura 5.1: Transposición didáctica.

Para el desarrollo de este trabajo cada componente de la transposición didáctica se describe a continuación.

- *El saber*: corresponde al conjunto de los números reales, su formalización a lo largo de la historia y los dos tipos de representación las construcciones con regla y compás y las expansiones decimales.
- *El docente*: quien a partir de los conceptos descritos en el saber acerca de los números reales, planea las actividades que conforman la unidad didáctica, las implementa y ajusta.
- *El estudiante*: como el centro de atención del proceso de enseñaza y aprendizaje mediado por la unidad didáctica y que busca una mejor comprensión del conjunto de los números reales, sus operaciones y propiedades.

5.2. La Competencia en matemáticas y la competencia matemática

En la sección anterior se presentó la transposición didáctica como una aspecto del trabajo que desarrolla un docente. En este apartado se precisa el concepto de competencia basado en el estudiante, el cual es un componente importante dentro de la estructura que plantea el MEN en [26] para la educación matemática en secundaria, y que en ocasiones se usa para describir las actuaciones de los estudiantes sin ningún tipo de diferencia.

Con el propósito de delimitar mejor el concepto de competencia de acuerdo con las actuaciones de los estudiantes al desarrollar una “situación”, se expone lo presentado en [12], en el que la competencia se diferencia en dos tipos, la *competencia en matemática* y la *competencia matemática*.

D'Amore en [12] explica que cuando los estudiantes abordan una "situación" en la clase de matemáticas, se distiguen dos maneras de actuar. La primera es la *competencia matemática* que está relacionada con que el estudiante tiene un excelente manejo de los algoritmos necesarios para darle solución y *la competencia en matemática* que está relacionada con la manera en la que el estudiante interpreta, manipula, infiere, etc. La información para darle solución a la situación.

De acuerdo con esto D'Amore expresa:

> *"La competencia en matemática se centra en la disciplina matemática, reconocida como ciencia construida, como el objeto propio, específico, de conocimiento. El estudiante entra en contacto con saberes específicos, saberes que la sociedad ha englobado en los conocimientos reconocidos como base para un digno ingreso a su interno[8]; se apropia de una parte de dicho saber, tanto formal como informalmente. Se reconoce así la existencia de un dominio conceptual y afectivo que media entre el estudiante mismo y la Matemática..."*

Mientras que la competencia matemática es:

> *"La competencia matemática se reconoce cuando un individuo ve, interpreta y se comporta en el mundo en un sentido matemático. La actitud analítica o sintética, con la cual algunas personas afrontan situaciones problemáticas, es un ejemplo de este tipo de competencia. Existen buenos resolutores de problemas que pueden reconocer, delimitar y resolver situaciones problemáticas; lo que viceversa, a veces, no es fácil evidenciar de personas que tratan bien, por ejemplo algoritmos."*

Teniendo en cuenta lo anterior, al desarrollar las actividades de la Unidad Didáctica de este trabajo se deben promover situaciones que favorezcan la competencia matemática, sin embargo, es de resaltar que no se puede dejar de lado la competencia en matemáticas.

5.3. El currículo de matemáticas

En la sección inicial se presentó el trabajo que desarrolla el docente a partir de la transposición didáctica, luego se abordaron las actuaciones que un estudiante puede tener al solucionar una "situación " en la clase de matemáticas como la competencia. Ahora, en esta sección se aborda el currículo como la estructura bajo la cual se imparte el conocimiento en en la etapa escolar en Colombia.

El Ministerio de Educación Nacional MEN (Colombia) en [26], hace una presentación de cómo se estructura el conocimiento matemático desde los primeros años de educación, que

[8]El autor hace referencia que con el manejo de algoritmos el estudiante se puede desenvolver con exito en la vida cotidiana.

inician el grado 1^o de enseñaza básica y finalizan en el grado 11^o de enseñanza media[9]. Por otra parte, la propuesta del MEN, además distribuye todo el conocimiento de las matemáticas a partir de la siguiente estructura, hay cinco tipos de pensamiento y a cada uno de estos se le asocian sistemas particulares, de la siguiente manera.

- Pensamiento Numérico y Sistemas numéricos.
- Pensamiento Espacial y Sistemas geométricos.
- Pensamiento Métrico y Sistemas de medidas.
- Pensamiento Aleatorio y Sistemas de datos.
- Pensamiento Variacional y Sistemas Algebráicos y Analíticos.

Específicamente para el conjunto de los números reales, se tiene que un estudiante debe abordar dicho conjunto en el ciclo de los grados 8^o y 9^o dentro de lo que se denomina el Pensamiento Numérico y los Sistemas Numéricos.

De acuerdo con esto, cuando un docente se dispone a abordar un concepto matemático (para este trabajo está relacionado con los números reales) debe tener presente algunas herramientas que le permitan analizar el contenido matemático de manera que pueda llevarlo a sus estudiantes (transposición didáctica). Estas herramientas se presentan en [21] y son propuestas por Rico en [35] y específicamente son *la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis de los fenómenos (fenomenología).*

- *La estructura conceptual.* En este apartado se hace una revisión de cómo se construye el conjunto de los números reales a partir de la prpuesta de Estándares Básicos de Competencias del MEN, en el que se encuentra que esta construcción inicia desde el ciclo de grado 1^o a 3^o con la construcción del concepto de número y del significado que se le puede dar en diferentes contextos como (medición, comparación, localización, entre otros). En el siguiente ciclo, grados 4^o y 5^o, se introduce el concepto de fracción en los mismos contextos en los que se abordó el concepto de número y se plantea el trabajo conjunto de los números naturales, continuando con los grados 6^o y 7^o, donde se propone un trabajo más formal con los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, resaltando que no se hace alución explícita a $\mathbb{Z}$ pero son necesarios para trabajar con $\mathbb{Q}$. Finalmente como se mencionó antes, se propone que $\mathbb{R}$ se trabaje en los grados 8^o y 9^o.

A manera de reflexión se evidencia que la propuesta anterior tiene una coherencia con cómo se dió la construcción del conjunto de los números reales a lo largo de la historia y que se puso de manifiesto en el capítulo 4.

[9]En Colombia la educación escolar va desde el grado 1^o hasta grado 11^o el tiempo comprendido entre los grados 1^o a 9^o se denomina educación básica (del cual se puede hacer una subdicisión en básica primaria y básica secundaria) y los grados 10^o y 11^o corresponden a la educación media

- *Los sistemas de representación.* Para este aspecto se realizó una revisión de los diferentes sistemas de representación asociados al concepto de número, visto desde la teoría del análisis didáctico[10] propuesta por Rico en [36].

  Los sistemas de representación corresponden a una de las maneras de organizar el currículo dentro del análisis de contenido y de acuerdo con [20], se trata de la manera en la que se representa un concepto y su relación con otros conceptos. Su importancia radica en que los símbolos presentes en los conceptos matemáticos aportan distintos significados para un concepto y que un mismo concepto admite y necesita de varios sistemas de representación. Para [6], los posibles sistemas de representación que puede tener un concepto de las matemáticas escolares, en particular, para el conjunto de los números reales son:

  - *Sistema de representación simbólico.* Cuando el concepto tiene sus propios signos (números, letras y símbolos), se puede operar con ellos y existe una relación entre ellos.

  $$2; \sqrt{3}; \frac{5}{8}, ; 9; \overline{41}; 6,421, e^x, \infty, \pi, \phi$$

  - *Sistema de representación verbal.* Cuando el lenguaje natural hace posible referirse a los conceptos y procedimientos matemáticos que se quieren representar.

  "raíz de dos", "un medio"

  - *Sistema de representación geométrico.* Para los conceptos que admiten una representación geométrica.

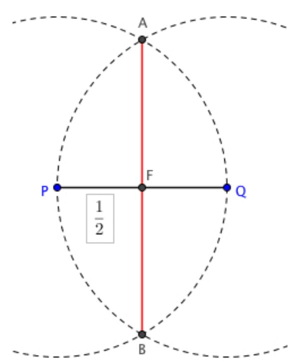


Figura 5.2: Sistema de representación geométrico.

[10] El análisis didáctico está compuesto por cuatro análisis: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación y su objetivo es contribuir al diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas en matemáticas.

- *Sistema de representación gráfico*. Cuando el concepto se puede representar en la recta numérica, el plano cartesiano de dos y tres dimensiones, en el plano polar o en el plano complejo.

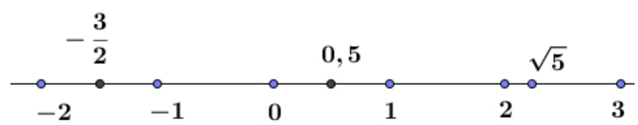


Figura 5.3: Sistema de representación gráfico.

Además de los anteriores existen otro tipo de representaciones que para el caso de los números reales que casi no se utilizan.

- *Sistema de representación tabular*. Está relacionado con el sistema de representación numérico pero tiene sus propios signos y reglas para las filas y columnas de una tabla.
- *Sistema de representación manipulativo*. Cuando un material de uso específico para las matemáticas escolares tiene sus propios elementos y reglas.
- *Sistema de representación pictórico*. Cuando un concepto se puede representar mediante un dibujo o esquema.
- *Sistema de representación ejecutable (TIC)*. Está asociado a programas o aplicativos que cumplen las características necesarias para un sistema de representación.

- *El análisis de los fenómenos (fenomenología)*. En este apartado se presentan algunos fenómenos en los que están presentes los números reales y que sirven de insumo para el trabajo que se desarrollará más adelante en la unidad didáctica. Por ejemplo se tienen:
  - El concepto de belleza asociado a la proporción áurea, presente en la naturaleza y en el arte, permite abordar el concepto de número irracional.
  - Los fractales como la iteración de procedientos, como es el caso del copo de nieve Koch, permiten abordar las fracciones y sus operaciones.
  - La ley de Graham (Química) es la propiedad que tienen los gases para dispersarse en todo el espacio que poseean, de acuerdo con su densidad (masa molar). Es decir, los menos densos tienen una velocidad mayor a los que tienen mayor densidad lo que permite abordar el concepto de razón.

Capítulo 6

Unidad Didáctica

6.1. Introducción

Para el diseño de esta unidad didáctica se parte de la experiencia del docente al abordar el conjunto de los números reales y las diferentes dificultades y errores en los que incurren los estudiantes, dentro de los que se encuentran el mal uso de los signos y errores en los algoritmos de las operaciones de los conjuntos númericos precedentes (naturales, enteros y racionales) que se hacen más explícitos cuando se aborda el conjunto de los números reales.

Con el propósito de aportar en la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes se propone esta unidad didáctica, con la que se busca favorecer la competencia en matemáticas de los estudiantes de grado noveno del Instituto Pedagógico Arturo Ramírez Montúfar de la Universidad Nacional de Colombia (IPARM), en el contexto de los números reales, sus operaciones y propiedades.

La unidad diáctica está estructurada de la siguiente manera. Se incia con la descripción del problema, seguido de esto se hace una descripción del contexto teniendo en cuenta tres aspectos, el contexto curricular del tema abordado, el aspecto socioeconómico de los estudiantes y el contexto académico de los estudiantes. Luego se presentan los objetivos propuestos. Seguido a estos se describen los materiales y recursos, la metodología de trabajo y el proceso de evaluación. Finalmente se presenta la secuencia de actividades que conforman la unidad didáctica en la que se presentan reflexiones en relación con su aplicación y por último, se plantean las conclusiones del trabajo y se hacen sugerencias para futuros trabajos.

6.2. Descripción del problema

Como se puso de manifiesto en el capítulo 3, a los estudiantes de grado noveno habitualmente se les hace una presentación del conjunto de los números reales de manera conjuntista, en la que al realizar operaciones incurren en errores asociados a los tipos de representación, dado que son entendidos como entes abstractos y carentes de sentido.

Por otra parte, dada la manera como se presenta $\mathbb{R}$ en la educación básica secundaria, los estudiantes "heredan", los errores y dificultades de los conjuntos númericos precedentes[11], y se incurre en el error de asumir los números reales de la misma manera que los números naturales. Ni siquiera se puede afirmar que lo hacen como números enteros dado que también incurren en errores en el manejo de los signos. De los errores descritos, para el conjunto de los números reales, se puede afirmar que estos son consecuencia del concepto de número que tiene el estudiante y específicamente están relacionados con las diferentes formas de representación.

Como complemento de los anterior, los resultados de las pruebas Saber para grado noveno muestran que en el IPARM se está privilegiando el trabajo relacionado con el Pensamiento Numérico, específicamente con los algoritmos (competencia en matemática) y se están dejando de lado los demás tipos de pensamiento.

De acuerdo con lo anterior surge la propuesta de esta unidad didáctica[12], cuyo propósito es permitir a los estudiantes adquirir una mejor comprensión del significado de los números reales, sus operaciones y propiedades y en la cual se abordan dos tipos de representación (la geométrica y la numérica) de este conjunto bajo una perspectiva del aprendizaje significativo[13].

6.3. Descripción del contexto de unidad didáctica

Con el própósito de fundamentar de mejor manera esta unidad didáctica se hace una descripción general del contexto en el cual se desarrolla, organizado de la siguiente manera, el *Contexto Curricular* como la estructura bajo la cual está regido el tema elegido (los números reales), el *Contexto Socio-económico* de los estudiantes de la Institución y finalmente, el *Contexto Académico* en el que se hace una descipción local del aprendizaje de los estudiantes.

- *Contexto curricular*. Como se mencionó anteriormente el conjunto de los números reales está enmarcado dentro de los estándares básicos de competencias del MEN para el ciclo comprendido por los grados octavo y noveno de educación básica secundaria. En el IPARM esta temática está propuesta dentro de la malla curricular del área para ser abordada en grado noveno.

[11] Como se mencionó en los aspectos didácticos la construcción del conjunto de los números reales se hace presentando primero los números naturales, luego los números enteros y los números racionales, luego al abordar los números irracionales se forma el conjunto de los números reales.

[12] La unidad didáctica es una forma de planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje alrededor de un elemento de contenido que se convierte en eje integrador del proceso, aportándole consistencia y significatividad, [16].

[13] El aprendizaje significativo es entendido esencialmente como la capacidad que tiene el estudiante para relacionar las ideas previas con el nuevo conocimiento de una manera no arbitraria [9].

Los criterios de evaluación para esta unidad didáctica se elaboraron de acuerdo con los criterios de evaluación que tiene el área de matemáticas y de los cuales se hace una equivalencia con la escala de valoración nacional contemplada en el Decreto 1290 de 2009 que reglamenta la evaluación y la promoción de los estudiantes en la educación básica y media.

- *Contexto socio-económico de los estudiantes.* Esta unidad didáctica se desarrolló en el Instituto Pedagógico Arturo Ramírez Montúfar (IPARM) el cual se encuentra ubicado dentro del campus de la sede Bogotá de la Universidad Nacional de Colombia, el cual atiende una población de estudiantes que son hijos de estudiantes, docentes, personal administrativo y jubilidados de la Universidad. El IPARM cuenta con alrededor de 700 estudiantes en los niveles de pre-escolar a undécimo grado, con un promedio de 30 estudiantes por curso.

  En particular el grupo de estudiantes con el cual se trabajó en la implementación de la unidad didáctica está conformado por 28 estudiantes, cuyas edades oscilan entre los 14 y 16 años, ubicados en los estratos socio-económicos 2, 3 y 4, situación por la cual se descibe el grupo como heterogéneo en sus condiciones culturales y actitudinales con respecto a las responsabilidades escolares.

- *Contexto Académico.* Los 28 estudiantes que participaron en el trabajo de la unidad didáctica se caracterizan en su mayoría por tener un buen desempeño académico, muestran un gran interés por las actividades de clase, que les permitan mejorar su "nivel" académico en la asignatura de matemáticas. Por otra parte el desempeño que el IPARM tiene en las pruebas Saber[14] es muy descatacado, estando ubicado dentro de la categoría de "muy superior". Como información adicional en el año 2015 estuvo ubicado como el primer colegio público en Bogotá para la prueba Saber 11.

  Para la evaluación de los estudiantes, el Proyecto Educativo Institucional propone la siguiente clasificación: el aspecto conceptual, el aspecto procedimental y el aspecto actitudinal.

6.4. Objetivos

Como el objeto de trabajo de esta unidad didáctica es el conjunto de los números reales, sus operaciones y propiedades, se propone un objetivo general y varios específicos de manera que se direccione el trabajo a desarrollar, por tanto se propone:

[14] Las pruebas Saber son una serie de pruebas estandarizadas que realiza el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES), en los grados 3^o, 5^o, 7^o, 9^o y 11^o, siendo está última requisito para el ingreso a la educación superior (universidad).

6.4.1. Objetivo general

Dar significado al conjunto de los números reales, sus operaciones y propiedades por medio de su representación geométrica (construcciones con regla y compás) y numérica (las expansiones decimales).

6.4.2. Objetivos específicos

Aspectos Conceptuales

- Reconocer y usar la representación gráfica de los números reales para justificar los resultados de su uso en diferentes situaciones.
- Reconocer procesos de aproximación mediante las expansiones decimales de un número real, para argumentar frente al resultado de una operación.

Aspectos Procedimentales

- Representar números constructibles en la recta como herramienta para caracterizar algunos números reales.
- Aproximar el valor numérico de un número real en el sistema decimal.

Aspectos Actitudinales

- Participar en las actividades, mostrando respeto, interés y responsabilidad.

6.5. Materiales y Recursos

Para el desarrollo de las actividades de esta unidad didáctica se propone el uso de los siguientes elementos denominados materiales y recursos, los cuales se constituyen en herramientas de apoyo para las actividades.

> Los *materiales* se entienden como los elementos diseñados con el propósito de apoyar los procesos educativos, como son: las guías de trabajo, los libros de texto y el software Geogebra, entre otros.
>
> Los *recursos* se entienden como los elementos que no fueron diseñados para desarrollar procesos educativos, pero que se pueden utilizar con este propósito, como: Excel, la calculadora científica y la regla y el compás.

6.6. Metodología

Para la implementación de las actividades de la unidad didáctica se sigue una estructura que incluye socializaciones grupales, explicaciones en el tablero por parte del profesor y aplicación de pruebas escritas. Para el planteamiento de cada actividad se propone colocar como eje problemizador una situación en contexto[15] socio-cultural.

Con el propósito de direccionar la puesta en marcha de la unidad didáctica se propone una actividad inicial, denominada evaluación diagnóstica, que consiste en la aplicación de una prueba en la que se tengan las dos clases de competencias descritas en los aspectos didácticos, Los resultados de la prueba diagnóstica se utilizan como insumo para el planteamiento de las demás actividades.

La estructura general de cada actividad de la unidad didáctica es: planteamiento de una situación en contexto, indagación en los estudiantes acerca de la pertinencia para la clase ¿cómo se relaciona con la clase de matemáticas?, planteamiento de la solución y ejercicios de complementarios o de práctica.

Para cada una de las actividades se presentan a los estudiantes el objetivo, los materiales y recursos que se utilizan, los ejercicios de trabajo y una tarea con la que se pretende que el estudiante refuerce los contenidos trabajados durante la sesión. Para mayor especificidad en este aspecto se puede observar el anexo denominado Elementos de una clase. El análisis de los resultados de la unidad didáctica es mixto, considerando que para la revisión de las actividades se tienen en cuenta aspectos cualitativos y cuantitativos observables en las actividades de los estudiantes.

6.7. La evaluación

Al evaluar la implementación de esta unidad didáctica se pueden determinar las habilidades y competencias que los estudiantes de grado noveno pueden desarrollar en relación con la aproximación al significado de los números reales, sus propiedades y operaciones utilizando de acuerdo con los tipos de representación planteados (las construcciones con regla y compás y las expansiones decimales) y las dificultades que se presentan durante este proceso. Por eso, en este apartado se plantean los criterios de evaluación con que se analizarán los instrumentos propuestos para cada una de las actividades de la unidad didáctica.

La evaluación de los estudiantes en el IPARM esta propuesta para abordar tres ámbitos de los estudiantes, que de acuerdo con el Sistema de Evaluación Institucional son:

- *Ámbito Conceptual*: relacionado con el desarrollo de la capacidad cognitiva y de los procesos de pensamiento que, en concordancia con los saberes disciplinares, permiten la formalización de nociones, conceptos y categorías que atienden a la formación del criterio.

[15] En la propuesta del MEN en [26] se identifican tres tipos de contextos para el desarrollo de las actividades que están muy relacionados entre sí, el contexto del aula de clase, el contexto escolar, el contexto extra escolar o contexto socio-cultural

- *Ámbito Procedimental*: hacen referencia al Hacer y "Saber Hacer" para "aprender a aprender" o para trnsformar la realidad. Se entienden como las actuaciones que son ordenadas y orientadas hacia la construcción de una meta.

- *Ámbito Actitudinal*: se relaciona con el "Saber Ser", es decir, con las actitudes y comportamientos para la convivencia, la relación entre pares, alteridad, autonomía y sentido de responsabilidad social, así como el interés y constancia por la disciplina académica.

Con el propósito de evaluar cada uno de los ámbitos mecionados se tiene la siguiente escala de valoración.

6.7.1. Escala de valoración

El área de matemáticas del IPARM acordó que para la valoración de las actividades, el desempeño de los estudiantes se catalogarán en cuatro niveles de acuerdo con el porcentaje alcanzado en la valoración numérica y se realizará una equivalencia con los niveles Superior, Alto, Básico y Bajo, que establece el decreto 1290 de 2009, la información se resume en la siguiente tabla.

Valoración	Porcentaje
Superior	Si la valoración está en el intervalo [90 % y 100 %]
Alto	Si la valoración está en el intervalo [80 % y 90 %)
Básico	Si la valoración está en el intervalo [60 % y80 %)
Bajo	Si la valoración es menor a 60 %

Tabla 6.1: Escala de valoración para el desempeño de los estudiantes.

Para determinar la valoración de un estudiante durante la implementación de las actividades de la unidad didáctica, las revisiones informales que el docente realiza de manera cotidiana y la aplicación de instrumentos formales de análisis que se tienen como la prueba diagnóstica, los ejercicios propuestos, la revisión de las actividades y un evaluación final,; se tendrá que el seguimiento particular permite obtener información relacionada con el proceso de aprendizaje del estudiante.

6.8. Secuencia de actividades

En las secciones anteriores de este capítulo se presentaron aspectos relevantes para la implementación de la unidad didáctica como la metodología y los criterios de evaluación, entre otros. En esta sección se hace una presentación de las actividades que componen la unidad didáctica. Para estas actividades se utilizarán los aspectos tratados en los capítulos 3 y 5 del presente trabajo, además se presentan reflexiones en relación con su aplicación.

6.8.1. La prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica, como actividad inicial de la implementación, permite establecer los conocimientos previos de los estudiantes, necesarios para el desarrollo de las actividades, identificar errores en los conceptos y procedimientos y determinar el punto de partida. La revisión de las actividades permite evidenciar el desempeño de los estudiantes y las posibles dificultades que se pueden presentar y finalmente, el examen final permite obtener información específica sobre el aprendizaje logrado por los estudiantes.

Para esta unidad didáctica, la prueba diagnóstica se dividió en dos sesiones de trabajo. En la primera sesión los ejercicios de la actividad estaban propuestos en relación con la competencia en matematicas, es decir, en observar cómo los estudiantes realizan ejercicios rutinarios. En esta prueba se pidió a los estudiantes desarrollar ejercicios de ubicación de números en la recta numérica, que representaran el conjunto de los números reales en un diagrama conjuntista y que realizaran diferentes operaciones. Como resultado de esta sesión se verifican las supuestos planteados en la descripción del problema (capítulo 4.), como no tener en cuenta las diferentes representaciones de los números reales y otras que no se tenían presupuestadas, como errores al representar números en la recta numérica o no tener claridad en los "fronteras"[16] de los diferentes conjuntos numéricos.

La segunda sesión de trabajo estuvo centrada en la competencia matemática, a partir de dos situaciones en contexto, una de ellas referida a las construcciones con regla y compás (Copo de nieve Koch) y otra relacionada con algunas aproximaciones que se han dado a lo largo de la historia del número π. En estas dos actividades se pretendía que los estudiantes interpretaran la información presentada y le dieran solución a los interrogantes propuestos. Las dificultades más relevantes están asociadas a cómo los estudiantes interpretan la información, los conocimientos relacionados en los interrogantes y cómo la utilizan para dar una solución adecuada.

[16]Por fronteras se refiere a la situación en la que el estudiante no diferencia los elementos que pertenecen a los diferentes conjuntos numéricos, por ejemplo, se cree que $\mathbb{N}$ no está contenido en $\mathbb{Z}$ por tanto se representan como si no existe intersección."

Descripción de la prueba diagnóstica

Con el propósito de identificar en los estudiantes de grado noveno las concepciones, dificultades y errores en los que incurren, al momento de abordar los números reales. Se aplicó a un grupo de 28 estudiantes, una prueba diagnóstica que involucra dos aspectos relevantes dentro de las matemáticas escolares, los algoritmos de las operaciones y la solución de situaciones en contexto, de manera que sean un elemento direccionador para el planteamiento de las actividades de la unidad didáctica.

Para la aplicación de la prueba diagnóstica, se plantearon dos instumentos (evaluaciones) los cuales se aplicaron en momentos diferentes (dos clases). La primera evaluación se plateó para evidenciar errores en los que incurren los estudiantes en ejercicios tradicionales y rutinarios con los algoritmos de las operaciones, la ubicación en la recta numérica y manejo de los conjuntos numéricos, y la segunda evaluación presentó situaciones en contexto con las que se busca que los estudiantes argumentaran, encontraran regularidades o dedujeran información desde el planteamiento de las construcciones con regla y compás (Copo de nieve Koch) y las aproximaciones del número pi (π).

Dentro de las actividades se dió más relavancia a tres elementos del manejo con los números en dos contextos expecíficos, el numérico y geométrico; los cuales son:

De la representación: se espera que el estudiantes identifique con claridad las diferentes representaciones que pueden tener los números racionales e irracionales (verbal, numérica, gráfica, simbólica, entre otras.) y así pueda transitar por ellas con el propósito de dar solución a las situaciones planteadas.

Del orden: se espera que el estudiante apoyado en las diferentes representaciones de los número racionales e irracionales, pueda comparar dos o más de ellos y establecer su orden.

De las operaciones básicas: se espera que identifique, en cuál o cuáles de las cuatro operaciones los estudiantes presentan mayores fortalezas o dificultades en el uso de los algoritmos en el conjunto de los números racionales e irracionales.

Actividades propuestas en la prueba diagnóstica

Sesión 1

En esta actividad de la prueba diagnóstica se plantearon tres ejercicios como se mencionó antes, presentados de manera tradicional. A continuación se presentan los enunciados (el formato de evaluación se presenta como anexo A.1. Sesión 1).

Ejercicio 1:	Representar en la recta numérica los siguientes números. $$-\sqrt{5};\ 1,\overline{6};\ \tfrac{7}{2};\ -2,5\ ;\ 0,\overline{4}, \pi, \sqrt[3]{2}$$
Explicación:	*En este ejercicio se pretende evidenciar como el estudiante utiliza la regla y el compás para representar números racionales e irracionales y como realiza los procedimientos para cambiar de representación los números, especialmente de número decimal a racional y viceversa.*
Ejercicio 2:	Por medio de un diagrama de Venn represente los diferentes conjuntos númericos.
Explicación:	*En este ejercicio se analiza cómo el estudiante por medio de la representación de conjuntos (Diagrama de Venn) entiende cómo se formó $\mathbb{R}$ en su etapa escolar.*
Ejercicio 3:	Realizar las siguientes operaciones. 1. $\frac{23}{4} + 0,3 - 20$
Explicación:	*Aquí se analiza cómo el estudiante realiza las operaciones que involucran números racionales o irracionales, especialmente se busca evidenciar el manejo de los diferentes tipos de representación de los números.*

Tabla 6.2: Enunciados Prueba diagnóstica: Sesión 1.

Sesión 2

Para esta actividad se formularon a los estudiantes dos situaciones en contexto, la primera está relacionada con los fractales, específicamente con la construcción del copo de nieve de Koch utilizando la regla y el compás y la segunda está relacionada con algunas aproximaciones al número π a lo largo de la historia, los enunciados completos se encuentran como anexo A.1. Sesión 2.

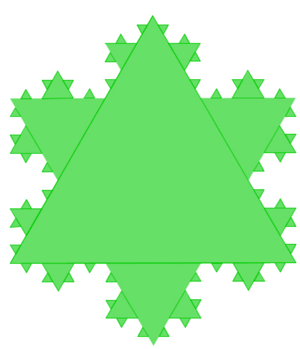


Figura 6.1: Copo de nieve de Koch.

Ejercicio 1:	Construcción de copo de nieve de Koch (utilizando regla y compás).
Explicación:	*En el ejercicio anterior, se pretende observar cómo los estudiantes pueden generalizar procedimientos de construcción repetitivos que involucran números racionales para posteriormente r generalizar las expresiones que están involucradas y realizar operaciones con ellas.*
Ejercicio 2:	Aproximaciones al número π.
Explicación:	*Para este ejercicio se busca evidenciar en los estudiantes cómo está estructurado el sistema decimal en relación con el orden de los números decimales, ya que deben determinar con claridad la expresión decimal asociada a cada aproximación y utilizar la posición de las cifras decimales para organizarlas, por otra parte, se quiere observar cómo están interpretando "las aproximaciones" y finalmente como a partir de su experiencia identifican relaciones de π con fenómenos cotidianos.*

Tabla 6.3: Enunciados Prueba diagnóstica: Sesión 2.

Teniendo en cuenta los intereses de cada uno de los ejercicios planteados en esta prueba es necesario plantear criterios que permitan su revisión.

Criterios para el análisis de la prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica consta de cinco ejercicios en los cuales se indaga acerca de la representación de los números (especialmente racionales), el orden y las operaciones básicas.

Los criterios que se presetan a continuación tienen el propósito de identificar dificultades y errores en los que los estudiantes incurren en ejercicios de tipo tradicional.

- Ejercicio 1: Representar en la recta numérica los siguientes números.

$$-\sqrt{5};\ 1,\overline{6};\ \tfrac{7}{2};\ -2,5\ ;\ 0,\overline{4}, \pi, \sqrt[3]{2}$$

Criterio 1. Ubica correctamente los números planteados en la recta numérica, utilizando una unidad de medida adecuada y presenta los números de manera racional.

Criterio 2. No ubica correctamente los números planteados utilizando una unidad de medida adecuada porque incurrió en errores al cambiar la representación de los números.

Criterio 3. No ubica correctamente los números planteados, utilizando una unidad de medida adecuada porque no cambia la representación de los números.

Criterio 4. El estudiante no realizó el ejercicio.

- Ejercicio 2: Por medio de un diagrama (dibujo) represente los conjuntos que forman el conjunto de los números reales.

  Criterio 1. Representa correctamente el conjunto de los números reales, teniendo en cuenta la contenencia de los subconjuntos que lo forman.

  Criterio 2. No representa correctamente el conjunto de los números reales, ya que evidencia confusión con las "fronteras" entre los conjuntos numéricos.

  Criterio 3. No realizó la representación pedida.

- Ejercicio 3: Realizar las siguientes operaciones.

  1. $\frac{23}{4} + 0,3 - 20$
  2. $\frac{2}{3} + 0,\overline{3}$
  3. $\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$
  4. $\sqrt{5} + \sqrt{6}$

  Criterio 1. Realiza las operaciones planteadas utilizando correctamente las diferentes representaciones de los números y los algoritmos de las operaciones.

  Criterio 2. No Realiza las operaciones planteadas por errores al cambiar de representación los números a pesar de realizar los algoritmos correctamente.

  Criterio 3. No Realiza las operaciones planteadas por errores al realizar los algoritmos de las operaciones.

  Criterio 4. Da respuesta al enunciado pero no se realizó los procedimientos.

  Ejercicio 1 sesión 2: Construcción de copo de nieve de Koch (con regla y compás).Luego de realizar la construcción se plantean preguntas.

- ¿Por qué es correcto afirmar que las medidas de cada uno de los segmentos de los pasos ii. y iii. son $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{9}$ respectivamente?.

  Criterio 1. Argumenta que el procedimiento realizado es una potencia de 3.

  Criterio 2. No puede establecer las relaciones correctamente.

  Criterio 3. No contesta.

- Si se realizan nuevamente los pasos ii. y iii. ¿cuál es la medida de cada segmento?

Criterio 1. Determina correctamente la medida del segmento presentando argumentos (operaciones).

Criterio 2. No determina correctamente la medida del segmento, consecuencia de errores en las operaciones.

Criterio 3. No determina la medida del segmento.

- Si se toma que el perímetro del triángulo inicial es 3 cm, ¿cuál es el perímetro de la figura en el paso iii.?

Criterio 1. Calcula correctamente el perímetro de la figura presentando argumentos (operaciones).

Criterio 2. Calcula incorrectamente el perímetro de la figura incurriendo errores en las operaciones.

Criterio 3. No calcula el perímetro.

Ejercicio 2 sesión 2: Aproximaciones al número pi.

- Organizar las aproximaciones presentadas de menor a mayor.

Criterio 1. Organiza correctamente las aproximaciones presentadas, sin cometer errores en las conversiones.

Criterio 2. Realiza correctamente las converisones pero no las organiza.

Criterio 3. No organiza correctamente las aproximaciones porque incurre en errores al realizar las converisones.

Criterio 4. No realiza la converisión.

- ¿cuál es para usted la mejor aproximación de π? Justificar la respuesta.

Criterio 1. Establece que la mejor aproximación está relacionada con el número de cifras decimales.

Criterio 2. Establece que la mejor aproximación está dada por la exactitud de las cifras decimales.

Criterio 3. Establece la mejor aproximación sin argumentos para ésta.

- ¿En qué situaciones de la vida real considera usted que está presente el número pi?

Criterio 1. Muestra relaciones con situaciones o contextos en los que está presente la circunfernecia.

Criterio 2. Muestra relaciones con situaciones o contextos que no involucran la circunferencia.

Criterio 3. Muestra relaciones con situaciones o contextos que no se relacionas con el enunciado.

Análisis de los resultados de la prueba diagnóstica

Luego de finalizar las dos sesiones de trabajo para realizar la prueba diagnóstica, se realizó una revisión de las respuestas presentadas por los estudiantes teniendo en cuenta los criterios establecidos, como consecuencia de esta revisión se obtienen los siguientes resultados:

Sesión de trabajo 1. relacionado con ejercicios rutinarios.

- Ejercicio 1: de los 28 estudiantes sólo 4 que equivalen al 14 %, realizaron correctamente la representación de los números, los 24 restantes es decir el 86 % incurrieron en errores de acuerdo con los criterios establecidos. Específicamente los erorres están relacionados así: 4 estudiantes que equivalen al 14 % dejaron la hoja en blanco, 9 estudiantes que equivalenten al 32 % incurrieron en errores al realizar el cambio de representación de los números, especialmente por no utilizar el procedimiento para pasar un número decimal a racional y finalmente 11 estudiantes que corresponden al 40 % no realizaron el cambio de decimal a racional y procedieron a representar los números decimales periódicos infinitos como si fueran números con cifras decimales finitas.

  En conclusión, se observa que la mayoría de los estudiantes incurren en errores de tipo procedimental, como el cambio de representación de los números racionales.

- Ejercicio 2: de los 28 estudiantes, 15 que equivalen 54 % realizaron un diagrama acertado y los 13 estudiantes restantes que equivalente al 46 % evidencian dificultades en la comprensión de los conjuntos numéricos, esto porque en la representación pedida de $\mathbb{R}$ presentan en errores. Dentro de los que se encuentra incurrir en errores de contencia de los conjuntos y no tener clararidad de los diferentes conjuntos numéricos (confundir $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{Z}$). Para este punto de la prueba diagnóstica, la conclusión es la necesidad de abordar dicha representación de $\mathbb{R}$.

- Ejercicio 3: De los 28 estudiantes, 2 de ellos que equivalen 7 % realizaron correctamente todas las operaciones planteadas, los 26 estudiantes restantes que equivalen al 93 % incurrieron en algún error de tipo procedimental. Específicamente 10 estudiantes es decir el 36 % presentaron errores al realizar el cambio de representación de los números decimales periódicos infinitos a números racionales, 11 estudiantes que equivalen al 39 % tuvieron errores en los algoritmos de las operaciones y 5 estudiantes que equivalen al 18 % se limitaron a escribir el resultado de la operación sin presentar los procedimientos realizados y se resalta que en la mayoría de ellos los resultados eran erróneos.

En la sesión de trabajo número 2, relacionada con situaciones en contexto.

- Ejercicio 1: Construcción de copo de nieve de Koch (utilizando regla y compás).

  a. ¿Por qué es correcto afirmar que las medidas de cada uno de los segmentos de los pasos ii. y iii. son $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{9}$ respectivamente?

De los 28 estudiantes, 10 que equivalen al 36 % concluyeron correctamente que se está realizando un procedimiento con potencias de 3, 11 estudiantes equivalentes al 39 % no pudieron establecer con claridad la relación, en algunos casos asociaron la medida con el número de puntos presentes y finalmente, el 25 % restante es decir 7 estudiantes no contestaron este ítem de la prueba.

b. Si se realizan nuevamente los pasos ii. y iii. ¿cuál es la medida de cada segmento?
Este ítem que está relacionado con el anterior muestra resultado similares. De los 28 estudiantes, 9 de ellos es decir el 32 % muestran argumentos para concluir que si se realiza una construcción más sobre los lados del triángulo, cada segmento de ésta medirá $\frac{1}{27}$, 12 estudiantes que equivalen 43 % no presentaron argumentos adecuados para la situación, 5 estudiantes sólo escribieron la respuesta y 7 de ellos dieron una respuesta errónea. Finalmente el 25 % restante, es decir 7 estudiantes, al igual que en el ítem anterior no contestaron.

c. Si se toma que el perímetro del triángulo inicial es 3 cm, ¿Cuál es el perímetro de la figura en el paso iii.?
Este ítem presenta un nivel de dificultad mayor, pues los estudiantes deben ser capaces de generalizar en relación con el número de segmentos que resultan en cada una de las construcciones, aspecto que se dificultó pues los resultados muestran que de los 28 estudiantes solamente 4 que equivalen al 14 % determinaron correctamente el perímetro de la fígura, mientras que 86 % no lo determinó correctamente. La distribución en este aspecto está dada así: 12 estudiantes es decir 43 % incurrieron en errores al realizar el cálculo del perímetro y el mismo número de estudiantes no contestó este item.

- Ejercicio 2: Aproximaciones al número π

i. Organizar las aproximaciones presentadas de menor a mayor.
De los 28 estudiantes, solamente 4 equivalentes al 14 % organizaron correctamente las aproximaciones presentadas, el 86 % presentó dificultades discriminadas así, 4 estudiantes es decir 14 % realizó la conversión de número racional a decimal pero no organizó los números de menor a mayor, 18 estudiantes que corresponden al 58 % incurrió en errores en los procedimientos de conversión de un número racional a decimal. Finalmente el 14 % restante, es decir 4 estudiantes, no constetaron este ítem.

ii. ¿Cuál considera usted que es la mejor aproximación de π? Justificar la respuesta.
Para este ítem, 13 de los 28 estudiantes, es decir 46 % considera que la mejor aproximación está relacionada con el número de cifras decimales, es decir, que si se presenta el número π como 3,1416, este número es la mejor opción porque sólo tiene cuatro cifras decimales mientras que 3,142857143 que es la aproximación dada por los egipcios no es adecuada por tener 9 cifras decimales. Por otra parte, 7 estudiantes es decir, el 25 % consideran que la mejor aproximación está dada por la exactitud en las cifras decimales, finalmente, el 29 % es decir 8 estudiantes, no contestaron este ítem.

iii. ¿En qué situaciones de la vida real considera usted que está presente el número pi?

Para este ítem 39 % de los estudiantes es decir 11 de los 28 estudiantes que conforman el grupo, asocian el número pi con situaciones en la que está presente la circunferencia, mientras que 7 estudiantes establecen relaciones con situaciones en las que no está la circunfenrecia de una manera explícita, como la programción de computadoras y las finanzas. Por último, el 29 % restante es decir 8 estudiantes, asocian π a situaciones como la calculadora o las mismas matemáticas.

En conclusión, para los resultados de la prueba diagnóstica se tiene que los estudiantes presentan dificultades relacionadas con los procedimientos (algoritmos) de los ejercicios rutinarios y en solución de problemas, con las interpretación de la información, pues al indagar con los estudiantes que no contestaron las pruebas se evidenció este aspecto. Por otra parte, se evidencia que la mayoría de los estudiantes no presenta dificultades de tipo conceptual pues sus actuaciones en la prueba muestran que saben qué acciones deben realizar para dar solución a los ejercicios propuestos. Sin embargo, los errores de tipo procedimental (como el mal manejo de los algoritmos o no cambiar de representación de los números correctamente) impiden que los resultados generales de la prueba sean mejores.

Conclusiones de la prueba diagnóstica

- Teniendo encuenta las dos sesiones de trabajo desarrolladas en la prueba diagnóstica, se evidencia de las actividades de las sesión 1. (ejercicios rutinarios) que se ratifican los supuestos planteados en la descripción del problema, pero no son un elemento que permita identificar aspectos más importantes de los conocimientos previos que tienen los estudiantes.

    - En los estudiantes se evidencian dificultades al realizar el cambio de representación de los números, por ejemplo expresar un decimal como racional, lo que impide realizar correctamente las operaciones planteadas.
    - Se evidencian dificultades en el uso de los radicales, ya que cuando solucionan una operación que los involucra, los estudiantes los asimilan como números enteros.
    - Los estudiantes evidencian dificultades al representar el conjunto de los número reales, debido a que confunden las diferencias entre los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, irracionales) que están en $\mathbb{R}$.
    - Para los estudiantes no es claro el procedimiento de representación de los números en la recta numérica, ya que incurren en errores de ubicación y división de unidades.

- Para las actividades de la sesión evidencian en los estudiantes además de las dificultades precentadas arriba, errores en la interpretación de la información, establecer generalizaciones de los procedimientos propuestos y organización de la información y los procedimientos.

A partir de lo anterior, las actividades de la unidad didáctica se enfocarán en el desarrollo de la competencia matemática, teniendo en cuenta que dados los resultados de la prueba diagnóstica, se puede afirmar que el otro tipo de competencia está inserta en ella.

6.9. Descripción de actividades

La secuencia de las sesiones de la unidad didáctica, se presenta a continuación:

Sesión de trabajo	Aspectos Relevantes
Sesión 0	Aplicación de la prueba diagnóstica.
Sesión 1	Actividad 1: *"Las razones y números racionales"*. Esta actividad en contexto aborda la ley de Graham (Química) para mostrar las razónes entre segmentos.
Sesión 2	Actividad 2: *"Introducción de los números irracionales"*. En esta actividad se propone abordar la sucesión de Fibonacci para aproximarse al número aúreo (ϕ).
Sesión 3	Actividad 3: *"Notación científica"*. En esta actividad se propone como contexto la nanotecnología, en la que se relacionará la medida del área superficial con respecto al volumen.
Sesión 4	Actividad 4: *Prueba de salida*. A partir de una evaluación se observarán a los avances de los estudiantes con respecto a la prueba diagnóstica.

Tabla 6.4: Secuencia de actividades.

Las actividades se especifican a continuación.

6.9.1. Actividad 1. Las razones y números racionales

En esta actividad se pretende abordar el llamado "algoritmo de Euclides" expuesto en el capítulo 5, cuando se presentaron las medidas conmensurables. A partir de la situación planteada en contexto, los estudiantes con ayuda de la regla y el compás deben establecer la razón entre dos segmentos. Como trabajo complementario se propone presentar las razones como números fraccionaros, seguido a esto, se introduce al estudiante en los números racionales, sus diversas representaciones y su ubicación en la recta numérica, propiciando la relación entre la representación del número como fracción y representación decimal del mismo.

- **Objetivo:** Abordar el concepto de número como la magnitud de un segmento, a partir de una situación experimental en contexto.

- **Actividad Inicial:** La ley de Graham. Esta ley se trabaja específicamente en las asignaturas de Física y Química.

  En la ley de Graham se expone que **la difusión** es una propiedad que tienen los gases cuando se distribuyen a lo largo del espacio disponible y con ella se concluye que la velocidad de difusión está relacionada con la densidad de cada gas, es decir, el gas que tiene mayor densidad, presenta una difusión más lenta con respecto a uno que tenga menor densidad.

  En un trabajo mancomunado con el profesor Manuel Guevara de la asignatura de Química de la Institución, se intenta realizar el siguiente experimento:

  En un tubo de vidrio abierto por los dos extremos, se colocan en cada uno de sus extremos unos corchos con "copitos" de algodón impregnados de una solución concetrada; a un lado estará el HCl ácido clorhídrico y en otro estará el NH_3 amoníaco, que al mezclarse forman NH_4Cl cloruro de amonio, es decir:

$$NH_3 + HCl \longrightarrow NH_4Cl$$

  Luego de un espacio de tiempo aproximado de 5 minutos en el interior del tubo se forma un anillo blanco de NH_4Cl más cercano a uno de los lados del tubo, la imagen 6.2, muestra una recreación de lo que sucede.

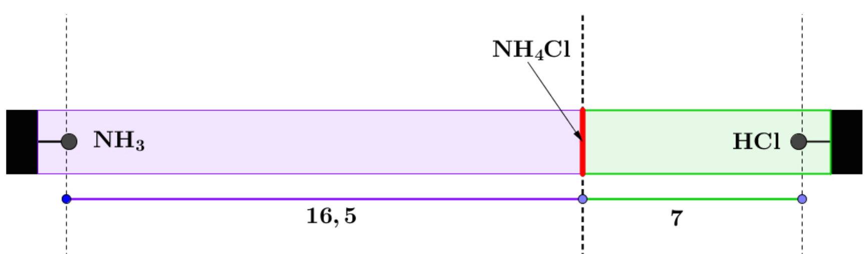


Figura 6.2: Formación del cloruro de amonio NH_4Cl.

  Luego se les pide a los estudiantes que con ayuda de una regla o un metro, midan las distancias desde cada uno de los extremos del tubo hasta el anillo con el propósito de establecer la relación entre las distancias. En el caso de la imagen son:

de HCl a NH_4Cl	$7,5\ cm$
de NH_3 a NH_4Cl	$16\ cm$

Con ayuda de la calculadora se pide a los estudiantes que determinen las razones entre dichas distancias es decir

$$\frac{16}{7,5} \approx 2,1\overline{3} \text{ y } \frac{7,5}{16} \approx 0,46875$$

Por último se expone a los estudiantes que esta situación del contexto de la Química, se denomina Ley de Graham, seguido a esto se expone dicha ley.

Ley de Graham: La velocidad de difusión de dos gases es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de sus masas molares.

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \tag{6.1}$$

Se tiene que v_1 y v_2 son las velocidades de discipación de los gases y M_1 y M_2 corresponden a las masas molares de los gases.

Para finalizar este momento de la sesión se pide a los estudiantes que prueben si el resultado obtenido en el experimento es consistente, partiendo de lo que plantea la Ley de Graham, sabiendo que las masas molares son, $HCl = 17$ y la del $NH_3 = 36,5$.

Como continuación de la actividad, a los estudiantes se les explica el "algoritmo de Euclides" para determinar el máximo común divisor (MCD) de dos segmentos conmensurables, de manera que con los conocimientos previos que poseen, determinen el (MCD), en conclusión se determina que el MCD$= 0,5$ cm, por lo que la razón entre de $7,5$ a 16 es equivalente a la razón 15 a 32. Y con el propósito de relacionar esto con los números racionales, se concluye que la representación de la razón es esta última.

- **Presentación del trabajo de clase**. Para esta actividad se propone un trabajo que pretende abarcar los tres momentos que se proponen para este ítem, trabajo individual, trabajo colaborativo y puesta en común. Para esto se propone el siguiente ejercicio:

  Sabiendo que las masas molares de Helio He *y del Dióxido de Azufre* SO_2 *son* 4 *y* 64 *respectivamente, representar mediante un gráfico la razón entre las velocidades de difusión.*

  - Trabajo individual, se espera que el estudiante utilice la Ley de Graham para determinar la razón que existe entre las velocidades de difusión. Se presupuesta un espacio de 5 minutos para el desarrollo de esta actividad y que participe ante los interrogantes propuestos.

- Trabajo colaborativo, luego del tiempo del trabajo individual, se forman grupos en los que se espera que los estudiantes compartan los resultados y complementen el trabajo realizado de manera individual, llegando a acuerdos y planteando un gráfico que dé solución a la situación propuesta.
- Puesta en común, se espera que los estudiantes, frente a sus compañeros, expongan los resultados y los comparen con los demás grupos.

Luego de finalizada esta parte de la sesión el profesor presenta a los estudiantes la relación entre las razones y los números racionales.

En primer lugar se presenta la definición de razón, como la relación entre dos magnitudes, presentando ejemplos como:

- En el salón de clase hay un total de 28 estudiantes conformado por 18 niñas y 10 niños.
- En los nacimientos de un hospital nacen 7 mujeres por cada 3 hombres.
- De los últimos cuatro mundiales de futbol, Colombia sólo clasificó a uno.

Seguido a esto se definen los números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \ y \ (MCD(p,q)) = 1 \right\}$$

Si se explican las diferentes interpretaciones de los números racionales (trabajo desarrollado en grado séptimo) como repaso, las cuales son: como fracción, como porcentaje y como número decimal, es decir, para la la expresión *tres quintos* de tipo verbal, se tienen representaciones equivalentes de acuerdo como se mostró en los aspectos didácticos.

$$\frac{3}{5}, 60\,\% \text{ y } 0,6$$

Se hace enfásis en la conversión de número racional a número decimal (por medio de la división usual) y de número decimal a número racional, por lo que se propone una guía de trabajo para reforzar estos algoritmos.

En el caso del cambio de representación de número racional a número decimal se tienen dos casos.

Cuando la cifras decimales son finitas	Cuando las cifras decimales son infinitas
Se toma la parte decimal del número y se escribe como númerador y para el denominador se cuenta el número de cifras decimales, se escribe el número 10^n donde n corresponde al número de cifras decimales y se simplifica la fracción si es posible. Si la parte entera es diferente de cero en el numerador se escribe el número decimal sin la coma. Por ejemplo: $0,25$ se escribe el número 25 en el númerador y como denominador 10^2, ya que hay dos cifras decimales. $$0,25 = \frac{25}{10^2} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$	Se toma la parte decimal del número y se escribe como númerador y para el denominador se cuenta el número de cifras decimales y se escriben tantos 9, como número de cifras decimales haya, se simplifica la fracción si es posible. Si la parte entera es diferente de cero, ésta se suma a la fracción resultante. Ejemplo: Para el número $1,\overline{36}$ se tiene $$1,\overline{36} = 1 + \frac{36}{99} = 1 + \frac{4}{11} = \frac{15}{11}$$

Tabla 6.5: Cambio de representación de número decimal a racional.

Por parte del profesor se presentan ejemplos como, si se tiene una cuerda ¿cómo se determina su mitad? de manera que se lleve a los estudiantes a buscar soluciones diferentes a utilizar la regla graduada.

Seguido a esto se propone la representación de los números racionales en la recta numérica (construcciones con regla y compás), para esto se pregunta a los estudiantes ¿cómo se divide un segmento en dos partes iguales?

Por parte del profesor se presentan ejemplos como, si se tiene una cuerda ¿cómo se determina su mitad? de manera que se lleve a los estudiantes a buscar soluciones diferentes a utilizar la regla graduada.

Posteriormente se propone que los estudiantes realicen esta actividad con los instrumentos de geometría. Para esto se dibuja en el tablero un segmento $\overline{AB}$ y se pantea un nuevo interrogante si A corresponde a 0 y B a 1, ¿Qué número se determina con este procedimiento?, luego se pide a los estudiantes que realicen el mismo procedimiento sobre uno de los segmentos resultantes (una de las mitades del segmento), buscando inducir al estudiante sobre los procesos infinitos que se pueden desarrollar y que llegue a la generalidad sobre la expresión resultante de este procedimiento en un cierto número de pasos, es decir, $\frac{1}{2^n}$ en la que n es el número de veces que se realiza el procedimiento.

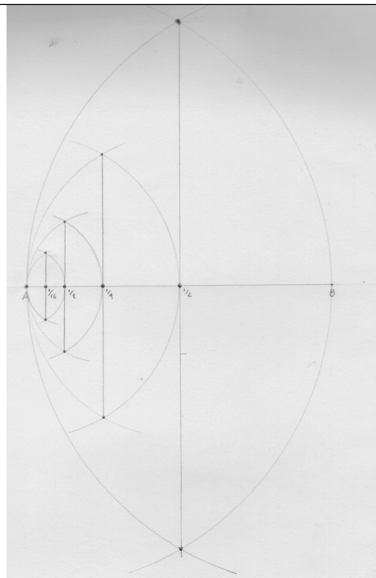
Representación del procedimiento para determinar la mitad de un segmento	Aspectos Relevantes
	Dentro del desarrollo de este ejercicio, la mayoría de los estudiantes realizó el porcedimiento pedido, que consiste en la repetición del procedimiento para determinar el punto medio de un segmento. Sin embargo, cuando se le indagó a los estudiantes respecto a la expresión $\frac{1}{2^n}$ que se origina de realizar la iteración, que para el ejercicio que se muestra en la figura de la izquierda, los estudiantes llegaron a ella luego de la intervención del profesor en la que les pidió que expresaran los denominadores en forma de potencia.

Tabla 6.6: Actividad No. 1 División de un segmento en potencias de dos.

Finalmente, para esta actividad se plantea a los estudiantes, el interrogante relacionado con si no se quiere dividir el segmento en dos partes, sino en 3, 5 ,7 partes ¿Cuál es el procedimiento que se debe realizar?

- **Espacios de Evaluación.** Cada uno de los espacios de trabajo en clase tienen una valoración teniendo en cuenta los siguientes criterios.

    - Aspecto cognitivo. Relaciona las velocidades de difusión como razones y las presenta de diferentes maneras.
    - Aspecto procedimental. Representa correctamente una razón entre segmentos dados.
    - Aspecto actitudinal. Se observarán los comportamientos de los estudiantes (participación, respeto, entre otros) a lo largo de los tres momentos, individual, grupal y puesta en común.

- **Materiales y Recursos** Para el desarrollo de esta actividad se debe solictar a los estudiantes que asistan a la clase con los siguientes materiales: calculadora científica, regla y compás y hojas blancas y se contarán con los siguientes recursos por parte del docente de Química: el tubo de vidrio, las soluciones que van a intervenir en el trabajo experimental y los elementos de seguridad.

Aspectos relevantes de la implementación de la Actividad 1.

En relación con las situaciones de clase.

- Para el desarrollo del experimento se presentó una situación de tipo lógistico que no se tenía presupuestada. Durante la preparación de los elementos el tubo de vidrio se rompió, lo que impidió que se pudiera realizar el espacio experimental formal, pues las soluciones que se utilizan se deben manejar de acuerdo con los estándares de seguridad del laboratorio de Química por esta situación se tuvo que recurrir a los recursos tecnológicos de manera que se utilizaron imágenes, videos y demás elementos en la web con el propósito de desarrollar la parte inicial de la actividad que pretendía abordar la ley de Graham.

- En las construcciones con la regla y el compás fue necesario asitir a los estudiantes para que pudieran llegar a expresiones generales como en el caso de la división de un segmento en dos partes iguales, el profesor llevó a los estudiantes a que expresaran los números como potencia. Luego de esta intervención los estudiantes pudieron llegar a la expresión pedida.

En relación con las actuaciones de los estudiantes se tiene que:

- Para los estudiantes la respuesta a la pregunta ¿Cómo se divide un segmento en dos partes iguales?, se reduce a utilizar la regla (escuadra) graduada y así medir el segmento y calcular la mitad.

- Cuando la actividad de clase buscó que los estudiantes llegaran a la generalización de la expresión $\frac{1}{2^n}$, fue necesaria la intervención del profesor para que llegaran a ésta.

6.9.2. Actividad 2. Introducción de los números irracionales

Esta actividad se divide en dos partes, en la primera se expone la sucesión de Fibonacci a partir del problema planteado por él en el año 1202 acerca de la reproducción de conejos y su aplicación en la vida cotidiana. Para la segunda actividad, se presentan los números irracionales a partir del uso del teorema de Pitágoras.

Para la primera actividad, se espera que los estudiantes a partir del planteamiento del problema de la población de conejos, establezcan los números generados para sucesión, de manera que seguido a esto, con ayuda de la calculadora determinen el cociente $\frac{n_1}{n}$ entre dos números consecutivos de la sucesión, siendo $n_1 > n$.

Seguido a esto se aborda la construcción de la espiral de Fibonacci como una aplicación, para su construcción los estudiantes con ayuda de la regla y el compás, la construyen a partir cuadrados en los que la medida de uno de sus lados corresponde a un números de la sucesión de Fibonacci. A continuación, se expone por parte del profesor el número aúreo a partir de la proporción que se genera por los lados de los cuadrados de la espiral y así llegar a la solución de la ecuación de segundo grado, cuya solución es ϕ.

Para la segunda parte el profesor realiza la presentación de los números irracionales de manera general a partir del teorema de Pitágoras, para la que se hace una analogía de la espiral de Fibonacci que se genera utilizando como polígono inicial un triángulo rectángulo cuyos catetos miden uno, para luego, construir sobre la hipotenusa un triángulo rectángulo de altura uno y así sucesivamente; de manera que los estudiantes construyen los números $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, ...,$ con los instrumentos de geometría (regla y compás).

Para finalizar la actividad, se hace mención a algunos números irracionales que no se pueden construir con la regla y el compás.

- **Objetivo:** Introducir el concepto de número irracional a partir de la razón entre dos números de la sucesión de Fibonacci.
- **Actividad Inicial:**

  La sucesión de Fibonacci. El problema de los conejos fue planteado por Fibonacci en 1202 en su *Liber Abaci* (libro del ábaco o libro de los cálculos), el cual presenta las siguentes condiciones.

  1. Suponga que tiene un espacio cerrado, en que se introduce una pareja de conejos (macho y hembra) que tienen un mes de nacidos y que no pueden reproducirse sino hasta que tengan dos meses de edad.
  2. Suponga que cada mes los conejos gestan una pareja (macho y hembra), luego de cumplir los dos meses de edad.
  3. Por último suponga que no se muere ningún conejo.

  ¿Cuántos conejos habrá luego de ocho meses?

  Luego de plantear este problema a los estudiantes, se les pedirá que formen parejas (trabajo colaborativo) de manera que puedan entender y discutir la situación. Como producto deben completar la tabla de valores con el número de conejos por cada uno de los meses y que justifiquen la información por medio de una gráfico (representación de la situación). Luego de un espacio de 20 minutos, el docente hace una presentación de manera que se genere debate y se unifiquen los resultados obtenidos por los estudiantes, es decir, se genera la sucesión de Fibonacci. A continuación se muestra el gráfico que se discute con los estudiantes.

  Una vez se establezca la manera en la que se forman los números de la sucesión se les pedirá a los estudiantes que completen la sucesión hasta que lleguen al mes veinte y se les propone la segunda instrucción de la sesión.

  Con ayuda de la calculadora, realice el cociente entre dos números consecutivos de la sucesión (información de la tabla construida), dentro de la explicación de este proceso

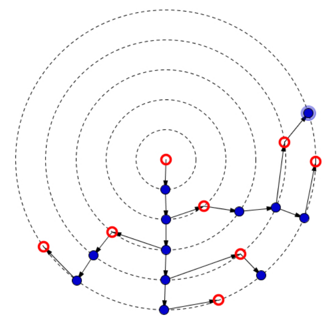
Explicación del gráfico	Representación de la sucesión de Fibonacci
En el gráfico de la derecha se realizaron circunferencias concéntricas (el orden de trabajo será de adentro hacia afuera), el punto central corresponde a la pareja inicial de conejos. Luego de esto se pasa a la primer circunferencia (primer mes) se cambia la representación del punto para indicar que el siguiente mes esta pareja se puede reproducir, el segundo mes la pareja tiene desendencia por lo que hay dos puntos ubicados sobre ésta, así sucecivamente. Por tanto, el número de conejos en cada mes corresponde al número de puntos sobre la circunfernecia correspondiente.	

Tabla 6.7: Actividad No. 2 Representación del problema de población de conejos (sucesión de Fibonacci).

se le pedirá a los estudiantes que lo hagan con todos los números trabajados antes, de tal manera que se pueda evidenciar de mejor manera la convergencia del cociente al número ϕ.

Luego de los espacios anteriores, se propone a los estudiantes como ejercicio para sus casas, la realización de la espiral de Fibonacci, en este ejercicio se utilizan los elementos de geometría (la regla y el compás). El docente se hace la explicación de cómo se contruye la espiral a partir de cuadrados cuyas medidas son los números de la serie de Fibonacci, como se muestra en la siguiente figura.

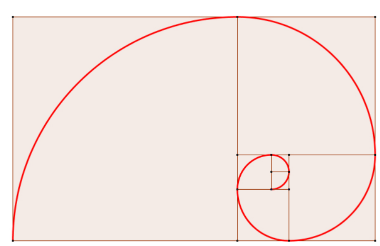


Figura 6.3: Espiral de Fibonacci.

A continuación se presentan a los estudiantes imágenes de cómo esta espiral está presente en la naturaleza y el arte (imágenes de plantas como el girasol, la vía lactea, el caparazón del Naitilus, el hombre de Vitrubio, entre otros).

La segunda parte de la actividad 2 tiene un doble propósito, la introducción de los números irracionales y la conexión con la actividad 1, en la que se presentaron las razones entre números (segmentos). Teniendo en cuenta que el número ϕ se define como una razón, se muestra que la convergencia del cociente de la tabla y la construcción de los cuadrados que generan la espiral, convergen a ϕ.

Definición de la proporción aúrea, el número ϕ.
Dos números a y b están en proporción aúrea si cumple que:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

El profesor presenta la solución de dicha proporción por medio de una sustitución, para esto se llama $\phi = \frac{a}{b}$. Y se inicia rompiendo el fraccionario del lado izquierdo de la proporción

$$\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

Por tanto, al hacer la sustitución se tiene

$$1 + \frac{b}{a} = \phi$$

teniendo encuenta que $\frac{b}{a} = \frac{1}{\phi}$, entonces la expresión resultante es

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

realizando operaciones e igualando a cero, se llega a la expresión

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

cuyas solución es

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Terminada la explicación se proponen a los estudiantes los siguientes interrogantes:

- ¿Por qué no se tiene en cuenta la otra solución de la ecuación cuadrática?
- ¿Cuál es el valor de ϕ?, determínelo con ayuda de la calculadora
- ¿Existe alguna relación entre el número ϕ y la sucesión de Fibonacci?, explique su respuesta.

Para finalizar se realiza una socialización con los estudiantes y en caso de que no lleguen a la conclusión de que el cociente de los números de la sucesión de Fibonacci (cuando son muy grandes) converge (se acerca) al número ϕ, se realizará una tabla de Excel que muestre los resultados.

Los números de la forma $\sqrt{n}$

Para esta parte de la sesión se presenta el concepto de número irracional a los estudiantes, para esto se bordan de manera elemental (teniendo en cuenta el nivel en el que se encuentran los estudiantes), a partir de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ presentado antes. Para esto se expone por parte del docente el Teorema de Pitágoras.

Se plantea el cálculo de la diagonal de un cuadrado y se constrasta con el trabajo desarrollado en la actividad 1, planteando que no se puede determinar el MCD de por ejemplo un segmento de medida 3 (sesión anterior) y $\sqrt{2}$ (de esta sesión). Por lo que se propone realizar un procedimiento similar al planteado con la espiral de Fibonacci, pero esta vez, se utilizan triángulos rectángulos.

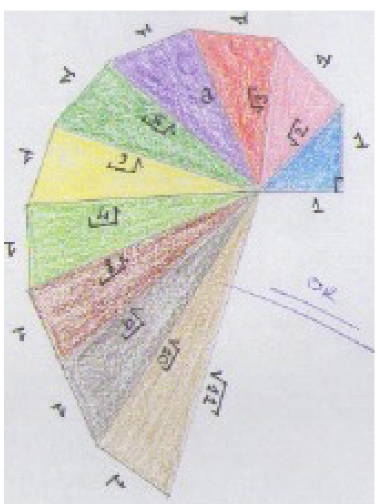
Representación realizada por un estudiante	Observaciones
	En está sesión, luego de haber realizado la introducción a los números irracionales, los estudiantes realizaron con relativa facilidad la espiral de Pitágoras. En la figura de la izquierda se presenta el trabajo realizado por un estudiante. Es relevante destacar que en este caso el estudiante realiza la secuencia sin percatarse de que hay números que tienen raíz cuadrada exacta y los presenta dentro de la raíz como $\sqrt{9}$

Tabla 6.8: Actividad No. 2 La espiral de Pitágoras.

El cierre de esta sesión se da cuando el profesor presenta otros tipos de números irracionales como, $\sqrt[3]{2}$, aspecto abordado en el capítulo 5, específicamente llamado los números que no se pueden construir con la regla y el compás; como los números π y e.

- **Presentación del trabajo de clase**

  Luego de presentar el problema de la población de conejos (sucesión de Fibonacci) los estudiantes deben completar una tabla de valores, determinar la razón entre dos números consecutivos de los consignados en la tabla para aproximarse al número ϕ y realizar la espiral de Fibonacci con los instrumentos de Geometría, para finalmente realizar la esperiral de Pitágoras con los números irracionaes de la forma $\sqrt{k}$, donde k es un número natural.

  - Trabajo individual,

    Para el momento de la sucesión de Fibonacci, el estudiante debe completar la información de la tabla (Guía actividad 2) y llegar acuerdos con su compañeros de trabajo.

    En el caso de las construcciones con regla y compás el estudiante realiza la espiral de Fibonacci y la espiral de Pitágoras siguiendo las instrucciones dadas por el docente.

  - Trabajo colaborativo,

    A partir de los grupos formados, se espera que los estudiantes contrasten la información de la tabla, aclaren dudas con sus pares y lleguen a acuerdos que permitan desarrollar la actividad.

  - Puesta en común, se espera que con la participación de los estudiantes se unifiquen los valores de la tabla, se aclaren dudas y se puedan hacer las construcciones.

- **Espacios de Evaluación**

  Cada uno de los espacios de trabajo en clase tendrán una valoración teniendo en cuenta los siguientes criterios.

  - Aspecto cognitivo. Diferencia los números irracionales de los racionales a partir de su expresión decimal.
  - Aspecto procedimental. Determina los valores de la sucesión de Fibonacci y realiza construcciones con regla y compás de los ejercicios propuestos.
  - Aspecto Actitudinal. Entrega las actividades propuestas para la clase y casa dentro de los tiempos estipulados.

- **Materiales y Recursos**

  Se continuan con los materiales propuestos para la actividad 1, (calculadora, regla y compás).

Aspectos relevantes de la implementación de la Actividad 2.

En relación con las actuaciones de los estudiantes se tiene que:

- Para que los estudiantes completaran la información de la tabla con los valores de la sucesión de Fibonacci, se tuvo que adelantar la presentación por parte del profesor, debido a que no lograron plantear un gráfico que presentara la información, luego de esto, los estudiantes determinaron la información pedida.
- Luego del apoyo del docente en la actividad 1 para las contrucciones con regla y compás, se evidenció un avance significativo en el trabajo de los estudiantes, en el que realizaron sin mayor dificultad las construcciones de las espirales.
- Para los cálculos en los que se hace uso de la calculadora los estudiantes completaron la actividad y en su mayoría concluyeron la relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción aúrea.

En relación con las situaciones de clase.

- Se evidencia la evolución de los estudiantes en relación con la comprensión de los números racionales e irracionales, pues en la puesta en común los estudiantes llegaron a la conclusión que un número racional se difernecia de un irracional por su expresión decimal.

6.9.3. Actividad 3. La notación científica

En esta actividad se platea a los estudiantes, una situación adaptada a su nivel educativo y que está relacionada con la nanotecnología. Específicamente se busca "obtener" expresiones decimales que permitan trabajar en relación con los procesos infinitos de las expansiones decimales.

Para esto el profesor presenta a los estudiantes un cubo de lado 8cm (esta medida se seleccionó para que los estudiantes comprendieran mejor la actividad y por lo pertiente de los resultados) y se propone ir dividiendo sus aristas en 2, 4, 8,... partes, para luego abordar la razón entre el volumen del cubo y el área superficial del mismo.

En relación con lo anterior, se hace el cálculo del cociente y se obtienen como valores números decimales periódicos, los cuales se utilizan para abordar el concepto de expansión decimal.

- **Objetivo:**
  Presentar las expansiones decimales de los números como un proceso infinito.
- **Actividad Inicial:**
  La nanotecnología es la rama de la tecnología que estudia y manipula la materia a una escala que está entre 1 y 100 nanómetros (1 nm equivale a 10^{-9} partes de un metro). El aspecto más relevante es que a esta escala, las propiedades de las sustancias y materiales varian con respecto a escalas mayores.

  El principio fundamental que rige el comportamiento de los materiales y sustancias a nivel nano, está en la relación volumen/superficie. De acuerdo con este principio, el valor de esta relación cambia dependiendo del numero de veces que se divida un trozo de material. Un ejemplo de esto se presenta en la dilatación de un material al aplicar electricidad (procesadores). Para iniciar la actividad el profesor presenta a sus estudiantes la siguiente situación:

> *Suponga que tiene un cubo de material x cuya medida es* $8cm$ *de arista, entonces el área superficial es* $384\ cm^2$ *y el volumen de material del cubo es* $512\ cm^3$*, con estos valores la relación volumen/superficie es* $\frac{4}{3}$ *y el cociente es* $1,\overline{3}$.

A continuación, el profesor propone, "si se dividen los lados del cubo a la mitad y se hacen los cortes, ya no se tiene un cubo, sino 8 cubos más pequeños, los cuales en conjunto tienen el mismo volumen de material del cubo inicial, por tanto, se da una variación del número de cubos en los que está distribuido el material y como consecuencia el valor del área superficial de material cambia (continuando con el ejemplo de los procesadores el profesor puede hacer la analogía manifestando que lo que se está creando son las capas de procesador) de acuerdo con esta secuencia de pasos, suponga que se continua realizando la división de los lados de los cubos siempre en la mitad, y propone a los estudiantes determinar la cantidad de cubos que se generan en cada uno de los cortes y presentarlos en una tabla (como la que se muestra en el anexo A.3), los datos que deben determinar los estudiantes son: número de partes en las que se divide la arista, número de cubos que se generan, la medida de la arista de un cubo, volumen de un cubo, volumen total, área de una cara del cubo, área superficial, razón volumen/superficie y cociente de la razón."

Como material de apoyo para el desarrollo de esta actividad, el profesor presenta a sus estudiantes unos cubos, de manera que pueda orientar a los estudiantes en relación con la medidas de los cubos y la cantidad resultante.El material se muestra en la siguiente imágen.

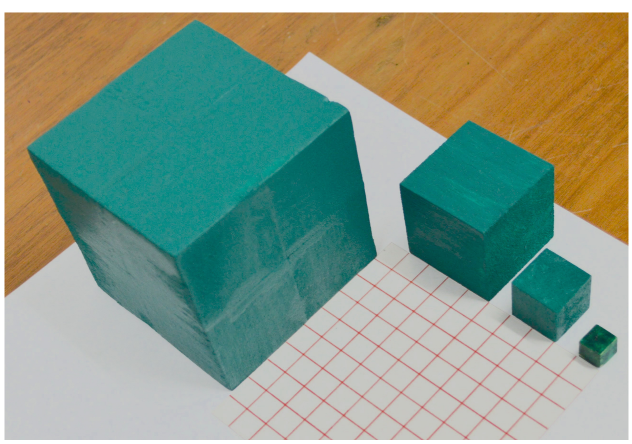


Figura 6.4: Subdivisión de las medidas de las aristas del cubo.

Luego de completar la tabla, se hace una reflexión a los estudiantes en relación con la medida que se propuso para el desarrollo de la actividad y se plantea ¿qué sucederá si la arista del cubo es 1 cm?, con este aspecto se aborda la temática de la notación científica y se muestra cómo estos procedimientos se tienen en cuenta para el trabajo en nanotecnología (continuando con los procesadores se hace la observación del número de capas que tienen y el grosor de dichas capas).

Continuando con la actividad, se indagan con los estudiantes los resultados del cociente y se pregunta acerca de la manera de representar estos resultados en la recta numérica. Luego de un momento de discusión, el profesor toma como ejemplo el primer cociente $1,\overline{3}$ y presenta a los estudiantes el procedimiento de representación por medio de la expansión decimal de este número como se abordó en la sección 4.6.1. Con ello se espera que el estudiante concluya que este proceso es infinito y por tanto la representación realizada es simplemente una aproximación y por tanto para representar estos números la mejor opción es la representación de fracción. A continuación se aborda el procedimiento para $\sqrt{2}$ de la siguiente manera.

Expresión decimal de un número irracional

Al elevar al cuadrado $\sqrt{2}$ se obtiene 2. Por lo que se van a aproximar números que al elevarlos al cuadrado se aproximen a 2, es decir

- Para un número con cero cifras decimales se tiene que:

menor que	2	mayor que
$1^2 = 1$	2	$2^2 = 4$

  Por lo tanto, raíz cuadrada de dos está entre 1 y 2, es decir $1 < \sqrt{2} < 2$.

- Para un número con una cifra decimal, se tiene

$1,1^2 =$	$1,21$
$1^2 =$	$1,44$
$1,3^2 =$	$1,69$
$1,4^2 =$	$1,96$
$1,5^2 =$	$2,25$

  por lo tanto $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$.

- Para 2 cifras decimales, es decir, para números mayores que 1,4 y para números menores que 1,5.

$1,41^2 =$	$1,998$
$1,42^2 =$	$2,0164$

Por lo tanto $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$.

- Para tres cifras decimales, es decir números mayores que 1,41 y menores que 1,42.

$1,411^2 =$	$1,990921$
$1,412^2 =$	$1,993744$
$1,413^2 =$	$1,996569$
$1,414^2 =$	$1,999396$
$1,415^2 =$	$2,002225$

Por lo tanto $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

Este procedimiento se puede seguir realizando con ayuda de la calculadora hasta determinar el número de cifras decimales que la calculadora permita, por último se propone realizar el procedimento con $\sqrt[3]{2}$.

- **Presentación del trabajo de clase.** Luego de presentar a los estudiantes la situación de la división de la arista del cubo, deben ser capaces de identificar el número de cubos generados por la división de la arista del cubo inicial, luego de cada una de las subdivisiones, de manera que establezcan el cociente entre el volumen del cubo y el área superficial en el que el resultado corresponde a números decimales periódicos infinitos con los que se abordan el concepto de expansión decimal de un número.
  - Trabajo individual. Al momento de realizar la división de la arista del cubo, se espera que el estudiante realice el conteo de los cubos resultantes, calculando el área superficial y el volumen.
  - Trabajo colaborativo. Para este aspecto se espera que los estudiantes discutan con sus pares acerca del número de cubos que se generan al dividir la arista del cubo y completen la tabla, utilizando el material de clase.
  - Puesta en común. Se espera que luego de la presentación de las expansiones decimales los estudiantes concluyan que este procedimiento es solo una aproximación y que para representarlos correctamente en la recta numérica se deben cambiar a su representación en forma de fracción.
- **Espacios de Evaluación.** Cada uno de los espacios de trabajo en clase tendrán una valoración teniendo en cuenta los siguientes criterios.
  - Aspecto cognitivo y procedimental. Determina el número de cubos generados luego de la división de la arista del cubo inicial, cálcula el cociente entre el volumen y el área superficial y argumenta acerca del proceso de expansión decimal.
  - Aspecto Actitudinal. Participa y apoya a sus compañeros de clase en el desarrollo de la actividad.
- **Materiales y Recursos.** Para el desarrollo de esta actividad se utiliza material didáctico (cubos de diferentes medidas y placas de medición) de manera que el estudiante pueda interpretar los aspectos involucrados en la situación.

Aspectos relevantes de la implementación de la Actividad 3

En relación con las actuaciones de los estudiantes se tiene que:

- Determinar el números de cubos producto de la división de las aristas del cubo en mitades, resultó ser difícil para los estudiantes, incurriendo en errores de conteo y para solucionarlos se propuso que asociaran la situación con el cubo de Rubik.

- Los estudiantes no evidenciaron al realizar esta actividad patrones en la tabla que les permitieran completar de una manera más ágil, como por ejemplo que al disminuir la medida de la arista a la mitad, el área superficial se duplica, por lo que los tiempos de la sesión de clase se debieron ampliar.

En relación con las actuaciones de la clase se tiene que:

- El material de apoyo permitió a los estudiantes una mayor comprensión acerca del número de cubos que se originan luego de la subdivisión de las aristas, pues para estos procedimientos los estudiantes evidenciaron dificultades para determinar el número de cubos que pide la situación.

- Los estudiantes asumen que las cifras decimales que presenta la calculadora corresponden a todas las cifras decimales del número, situación por la cual el profesor debió aclarar este aspecto.

6.9.4. Prueba de salida

La prueba de salida, al igual que la prueba diagnóstica es una herramienta que brida información de los estudiantes. Específicamente permite evidenciar el progreso en el desempeño de los estudiantes en relación con las temáticas trabajadas en la unidad didáctica, por otra parte, permite identificar errores persistentes e interpretaciones erroneas, entre otros aspectos.

Como cierre de la unidad didáctica, se planteó una prueba, que está compuesta por cuatro numerales en los que se quiere identificar de manera puntual las actuaciones de los estudiantes. A continuación se explica cada numeral y se describe el aspecto que se quiere analizar.

1. *Las razones.* En este numeral se propone a los estudiantes que por medio de una situación relacionada con el tema de la actividad 1. (ley de Graham), comparen dos razones representadas con segmentos y por medio del algoritmo de Euclides argumenten en relación con el enunciado. Específicamente los estudiantes deben llegar a conclusión que las razones son equivalentes.

2. *Ubicación en la recta numérica.* Para este apartado los estudiantes deben representar en la recta numérica un conjunto de números dados. En este numeral el estudiante debe ser capaz identificar y cambiar el tipo de representación de manera que ubique los números correctamente.

3. *El orden de los números irracionales.* En esta actividad los estudiantes a partir de una situación en contexto, deben ser capaces de establecer el área que se genera luego de realizar el corte de unos sólidos y compararla a partir de una de las medidas de sus lados, que es un número irracional. Se espera que los estudiantes determinen que las áreas son iguales y que hay diferentes formas de construir un número irracional.

4. *La expansión decimal del número* $\sqrt{3}$. Para este numeral el estudiante debe realizar una aproximación por defecto y por exceso del número como en la actividad 3. Para esto se utiliza la calculadora y busca que el estudiante determine la expansión decimal de $\sqrt{3}$ con 6 cifras decimales. Con este procedimiento se espera que el estudiante comprenda la infinitud de las cifras decimales de este número.

Criterios de para el análisis de la prueba de salida

- *Las razones.*

  Criterio 1. Establece correctamente las razones presentadas y concluye que estas son equivalentes.

  Criterio 2. Establece correctamente las razones presentadas pero no puede concluir que estas son equivalentes.

  Criterio 3. No establece correctamente las razones.

- *Ubicación en la recta numérica*

  Criterio 1. Ubica correctamente los números planteados en la recta numérica, utilizando una unidad de medida adecuada y presenta los números de manera racional.

  Criterio 2. No ubica corectamente los números planteados utilizando una unidad de medida adecuada porque incurrió en errores al cambiar la representación de los números.

  Criterio 3. No ubica corectamente los números planteados, utilizando una unidad de medida adecuada porque no cambia la representación de los números.

  Criterio 4. El estudiante no realizó el ejercicio.

- *El orden de los número irracionales.*

  Criterio 1. Determina correctamente la hipotenusa del triángulo rectángulo y establece que las áreas son iguales.

  Criterio 2. Determina incorrectamente la hipotenusa del triángulo rectángulo, lo que le impide concluir que las áreas son iguales.

  Criterio 3. Establece la relación entre las áreas sin determinar la hipotenusa del triángulo.

- *La expansión decimal del número* $\sqrt{3}$.

Criterio 1. Determina las cifras decimales pedidas.

Criterio 2. Determina algunas de las cifras decimales pedidas.

Criterio 3. No realizó el punto.

Análisis de los resultados de la prueba de salida

Luego de finalizar el trabajo con los estudiantes se analizaron los resultados de la prueba, en los que se evidenció un buen desempeño por parte de los estudiantes. A continuación se presentan las particularidades de cada uno de los númerales.

Los resultados generales de aprobación son: el 68 % del grupo de 28 estudiantes es decir 19 de ellos, aprobó la prueba de salida, el restante 32 % equvalente a 9 estudiantes obtuvo un desempeño bajo. Dentro de los aspectos más relevantes se encuentran:

- Para el numeral *Las razones*, se encuentra que los estudiantes determinaron correctamente las razones entre los segmentos propuestos. Sin embargo, al momento de comparar las razones los estudiantes no tuvieron en cuenta que debián utilizar la misma unidad de medida por lo que no lograron concluir que las razónes realmente son equivalentes.

- En el numeral *Ubicación en la recta numérica*, los estudiantes obtuvieron el mejor desempeño, ya que en su mayoría ubicaron correctamente en la recta numérica los números propuestos, los errores en los que incurrieron los estudiantes se relacionaron con el algoritmo para cambiar el número decimal periódico a fracción. Sin embargo, se resalta que todos los estudiantes identificaron que la manera de representarlos correctamente era cambiar su representación.

- Para el numeral *El orden de los número irracionales*, los estudiantes determinaron de manera correcta el valor de cada área. Sin embargo, fue necesaria la intervención del profesor debido a que para los estudiantes la instrucción " si la profundidad es igual" resultó confusa por lo que se tuvo que hacer una aclaración acerca de lo que significaba este aspecto en el contexto del ejercicio.

- Los resultados del numeral *La expansión decimal del número* $\sqrt{3}$ fueron satisfactorios, ya que los estudiantes realizaron la aproximación al número $\sqrt{3}$, evidenciando la comprensión de este método de cálculo.

Conclusiones finales

Luego de presentar en este trabajo algunas investigaciones en relación con los números reales que se denominaron antecedentes, la descirpción del problema de la enseñanza y el aprendizaje de los números reales, los fundamentos históricos, epistemóligicos y disciplinares acerca de $\mathbb{R}$, los aspectos didácticos que fundamentan la unidad didáctica y finalmente su estructuración e implementación en estudiantes de grado noveno, se presentan las conclusiones finales.

- El estudio histórico permitió fundamentar de mejor manera la unidad didáctica, ya que se pudieron identificar elementos importantes que a lo largo de la historia aportaron para el desarrollo del concepto de número real, en especial, cómo la concepción de número que se tiene en cada época de la historia presentó obstáculos para que se diera la formalización del conjunto de los números reales y cómo el constante trabajo por casi veinte siglos permitió que finalmente se formalizaran en el siglo XIX. Estos aspectos históricos no se le presentan a los estudiantes de educación media y por tanto son un insumo didáctico para el profesor que pretende presentarlos.

- El análisis de las representaciones como las construcciones con regla y compás y la representación decimal de los números reales, pusieron en evidencia que las construcciones con regla y compás no son un buen sistema de representación para $\mathbb{R}$, dado que con estos procedimientos sólo se pueden presentar algunos números reales y no es posible presentar todos los números reales. Números como“$\pi, \phi, \sqrt[3]{2}$, entre otros, no admiten esta representación. En contraste con esto, se tiene que la representación de un número real en el sistema decimal resulta ser una representación más completa pues con ella se puede abordar cualquier número real.

- Al indagar acerca de las diferentes investigaciones relacionadas con los números reales, se identificaron posibles errores en los que incurren los estudiantes cuando se aborda este conjunto numérico y que están asociados a cómo la presentación por parte del profesor de este conjunto numérico carece de contexto. Por lo tanto, dentro de la planeación y aplicación de las actividades de la unidad didáctica se buscó evitar este obstáculo didáctico, fortaleciendo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las temáticas relacionadas con $\mathbb{R}$ e induciendo a buscar situaciones de aplicación en otras ciencias o en la historia de las matemáticas, de manera que el estudiante puede establecer relaciones de los conceptos abordados en las actividades de la unidad didáctica.

- Estructurar la unidad didáctica permitió plantear de manera global y no segmentada el trabajo relacionado con la aproximación a los números reales, es decir, las actividades buscaron estar relacionadas a partir de situaciones en contexto y dejando de lado el aspecto tradicional de presentar a los estudiantes un listado de temáticas dispersas, inconexas y sin contexto. Estas actividades se complementan para aportar en la comprensión por parte de los estudiantes del conjunto $\mathbb{R}$, sus operaciones y propiedades.

- La implementación de las actividades de la unidad didáctica con los estudiantes de grado noveno favoreció el cambio en las dinámicas de clase. Los estudiantes se interesan por dar solución a los interrogantes planteados y el rol del profesor cambia, ya no es simplemente el que explica, por el contrario, ahora interactúa con los estudiantes para guiarlos en la solución de las situaciones planteadas. Por otra parte, el uso de material didáctico favorece el aprendizaje de los estudiantes pues se da sentido al concepto trabajado y se establecen relaciones, permitiendo un aprendizaje de tipo significativo.

- La aplicación de la prueba diagnóstica, su análisis y resultados comparada con los mismos aspectos de la prueba de salida, muestran un avance por parte de los estudiantes en la comprensión del conjunto de los números reales, ya que argumentan en aspectos relacionados con el correcto uso de la representación de los números, identifican las diferentes representaciones como la expresión decimal y la representación geométrica (para los números constructibles). En relación con la generalización de procedimentos, los estudiantes ahora indagan soluciones por ensayo y error.

Capítulo 7

Sugerencias

De acuerdo con las experiencias producto de la aplicación de las actividades de esta unidad didáctica se plantean a los lectores o interesados en futuras aplicaciones las siguientes sugerencias.

- Las actividades involucran un alto compromiso por parte de los estudiantes, por tanto, se debe tener presente la dinámica de trabajo de manera que los tiempos propuestos permitan el desarrollo de cada actividad.

- En relación con la posibilidad de realizar un trabajo interdisciplinar como el planteado en la actividad 1, se debe organizar la logística de uso del laboratorio de Química, si lo hay, o de un espacio adecuado para desarrollar la actividad.

- Es importante que los estudiantes cuenten con el manejo adecuado de los instrumentos de geometría, dado que en el caso de los estudiantes del IPARM fue necesario realizar un trabajo previo en relación con esto, pues realizarlo paralelo al desarrollo de la actividad puede hacer que los estudiantes se centren más en el procedimiento, que en la temática que se trabaja.

- Las actividades planteadas en este trabajo buscan aproximar a los estudiantes al concepto de número real. De acuerdo con esto, si se quiere formalizar este conjunto numérico es necesario tener en cuenta el nivel educativo (grado en el que se encuentran) de los estudiantes y buscar actividades que favorezcan dicha formalización en grados superiores.

Anexos

Anexo: A

Errores presentados por los estudiantes en la prueba diagnóstica

Teniendo en cuenta los resultados presentados por los estudiantes en relación con la sesión 1 de prueba diagnóstica, se presentan en esta sección los errores que presentaron los estudiantes en cada pregunta de la prueba y que ratifican lo enunciado en la descripción del problema. Para la explicación se coloca presente el criterio que se propuso evidenciar y los criterios que no se presentan son aquellos en los que el estudiante dejó en blanco la hoja.

- Ejercicio 1: Representar el la recta numérica los siguientes números.

$$-\sqrt{5};\ 1,\overline{6};\ \tfrac{7}{2};\ -2,5\ ;\ 0,\overline{4}$$

En las siguientes imágenes se presentan procedimientos de los estudiantes que involucran los tres criterios de análisis.

En esta primera imagen (figura A.1) se muestra que el estudiante incurrió el error de ubicar el número $-2,5$ entre el -2 y el -1, además representó el número $0,\overline{4}$ sin cambiarlo a número racional.

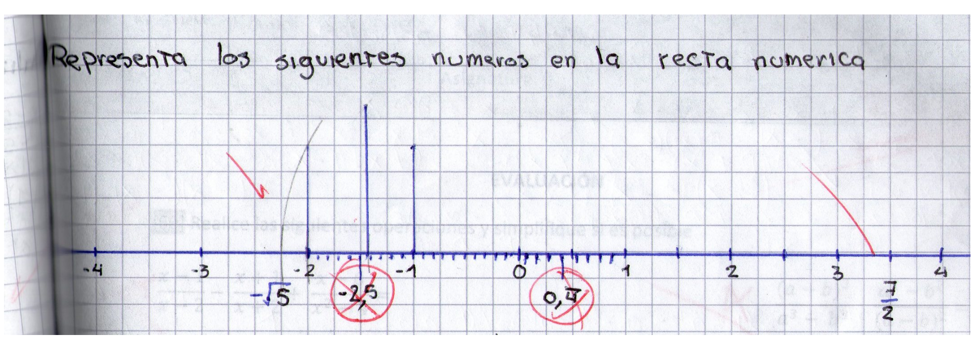


Figura A.1: Errores de representación en la recta numérica 1.

En la imágen (figura A.2) se presentan: los errores en representación de los números decimales periódicos infinitos, pues aunque hace la conversión a número racional, el estudiante incurre en el error de dividir mal el intervalo. Se observa que expresa el número $1,\overline{6}$ como el racional $\frac{16}{9}$. Sin embargo, no adjuntó el procedimiento para observar cómo está realizando el algoritmo para cambiar el número a racional. Por otra parte, se observa que la unidad de medida está dividida en 17 partes, lo que indica que el estudiante no tiene claro el procedimiento para representar números racionales, en primer lugar, porque utiliza el numerador para dividir la unidad y en segundo, porque considera que para dividir la unidad de medida en 16 partes debe hacer el mismo número de líneas divisorias.

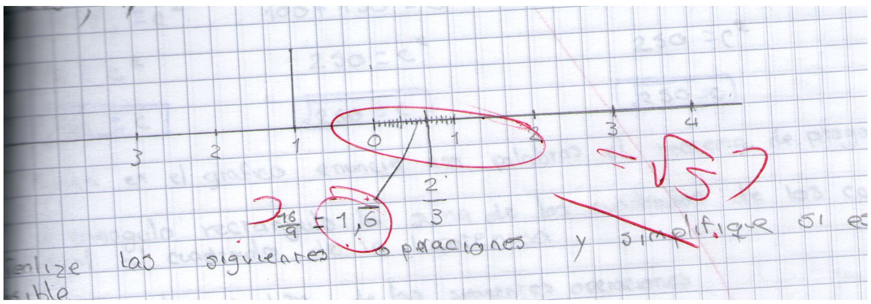


Figura A.2: Errores de representación en la recta numérica 2.

- Ejercicio 2: Por medio de un diagrama (dibujo) represente los subconjuntos que forman el conjunto de los números reales.

  Criterio 2: *El estudiante evidencia confusión con los diferentes conjuntos numéricos.*

  En la figura (A.3) se muestra la respuesta de un estudiante que considera que el conjunto de los números racionales está contenido en el conjunto de los números irracionales, es decir, todos los racionales son irracionales, por otra parte, no está el conjunto de los números enteros.

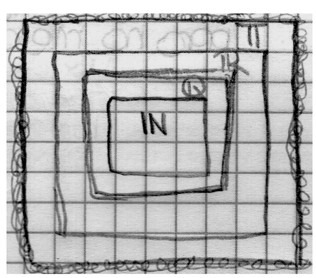


Figura A.3: Estudiante que confunde los conjuntos numéricos.

Criterio 3: *El estudiante no diferencia con claridad las fronteras entre los conjuntos numéricos.*

En la figura (A.4) se muestra la respuesta de un estudiante en la que pareciera que los conjuntos numéricos son disyuntos, por ejemplo, no es claro si $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ o si $\mathbb{N} \bigcap \mathbb{Z} = \varnothing$.

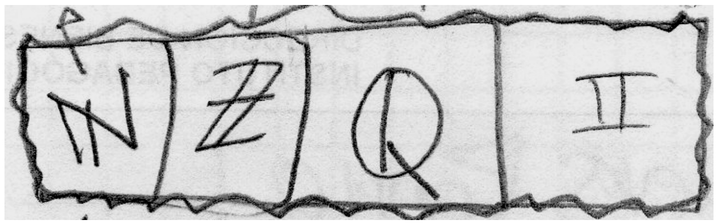


Figura A.4: Estudiante que no diferencia los límites de los conjuntos numéricos.

Es importante aclarar que si se acepta que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, se está incurriendo en un error ya que también se tiene que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{I}$.

- Ejercicio 3: Realizar las siguientes operaciones.

  1. $\frac{23}{4} + 0,3 - 20$
  2. $\frac{2}{3} + 0,\overline{3}$
  3. $\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$
  4. $\sqrt{5} + \sqrt{6}$

Criterio 2: *El estudiante no utilizó correctamente los signos.*

Criterio 3: *El estudiante incurrió en errores al cambiar la representación de los números.*

En la siguiente imágen (figura A.5) se muestra dentro del recuadro el número "+20", que en donde el estudiante cambió el signo, uno de los aspectos que lo llevó a dar el resultado de la operación de manera errada, el otro aspecto es que al cambiar de representación expresó $0,3$ como $\frac{30}{10}$.

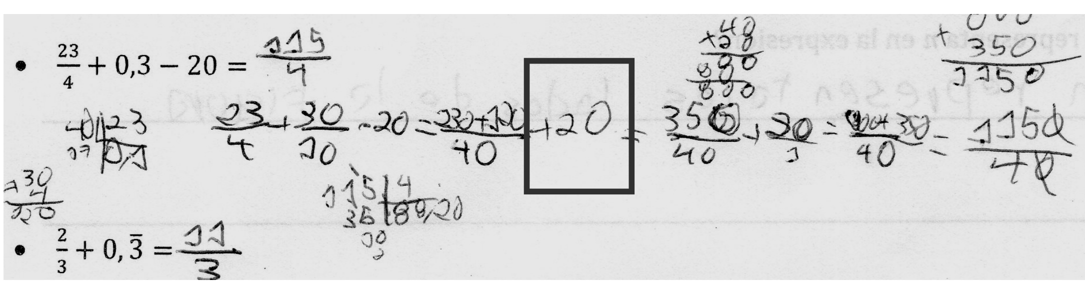


Figura A.5: Estudiante que incurrió en error con el manejo de los signos.

Criterio 4: *El estudiante dio una respuesta errónea pero no hay procedimiento.*

En la imágen (figura A.6), se muestran las operaciones que involucran raíces, en donde el estudiante está realizando erróneamente las operaciones y en donde no especifica procedimientos que permitan analizar por qué llega a estas respuestas. La operación $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ se colocó intencionalmente y ratificó lo expuesto en la descripción del problema.

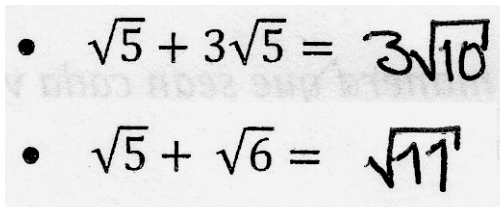


Figura A.6: Estudiante que da respuesta sin realizar procedimiento.

Anexo: B

Guías de la unidad didáctica

B.1. Prueba diagnóstica

Sesión 1.

1. Ejercicio 1: Representar en la recta numérica los siguientes números.

$$-\sqrt{5};\ 1,\overline{6};\ \tfrac{7}{2};\ -2,5\ ;\ 0,\overline{4}$$

2. Ejercicio 2: Por medio de un diagrama (dibujo) represente los conjuntos que forman el conjunto de los números reales.

3. Ejercicio 3: Realizar las siguientes operaciones.

   a) $\frac{23}{4} + 0,3 - 20$

   b) $\frac{2}{3} + 0,\overline{3}$

   c) $\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$

   d) $\sqrt{5} + \sqrt{6}$

Sesión 2

4. Situación 1: **Construcción del copo de nieve de Koch (utilizando regla y compás)**

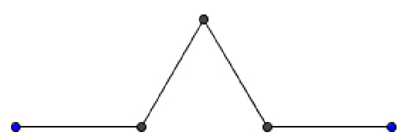
A comienzos del siglo XX surgió en matemáticas un área de estudio en la que se analizan figuras, en la que sin importar la escala con la que se observen, conservan el mismo patrón de comportamiento (tienen la misma apariencia) y que se denominan autosimilares. En 1975, Benoît Mandelbrot llamó a este tipo de figura "Fractal".

Uno de los fractales más conocidos, es el llamado"Copo de nieve de Koch", el cual fue planteado por Helge von Koch en 1904.

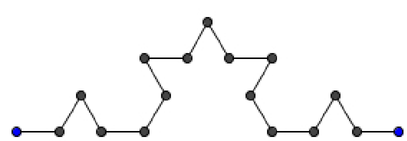
Construcción del copo de nieve de Koch: A partir de un triángulo equilátero.

i. Dividir cada uno de los lados del triángulo en tres partes iguales.

ii. Se borra el tercio del central y se construye una punta cuya medida es igual a un tercio (todas las medidas son iguales).



iii. Luego, se divide cada tercio, en tres partes y se repite el punto dos.



iv. Se repiten los pasos ii. y iii. sobre cada segmento del paso anterior.

De acuerdo con lo anterior, contestar las siguientes preguntas.

a. ¿Por qué es correcto afirmar que las medidas de cada uno de los segmentos de los pasos ii. y iii. son $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{9}$ respectivamente.

b. ¿Si se realizan nuevamente los pasos ii. y iii. ¿Cuál es la medida de cada segmento?

c. ¿Si se toma que el perímetro del triángulo incial es 3 cm, ¿Cuál es el perímetro de la figura en el paso iii.?

5. Situación 2: **Aproximaciones al número pi** (π).

Este número se define como:

"El cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro."

A lo largo de la historia diferentes personas, entre las que se encuentran reconocidos matemáticos y científicos, han planteado diferentes formas para calcular sus cifras decimales de manera que se aproximen lo más posible a él. El símbolo π que corresponde a la letra "p" en el alfabeto griego fue introducido en 1706 por el escritor y matemático inglés William Jones para denotar la primera letra de la palabra griega "perimetron", perímetro hoy en día. Sin embargo, quien popularizó el uso de π fue el matemático Leonhard Euler (1707-1783).

A continuación se presentan algunas aproximaciones de π dadas a lo largo de la historia.

En la Biblia, se encuentra la siguiente cita "***Tiro a Hiram*** *hizo también un vaso de bronce fundido que tenía 10 codos de diámetro, de un borde al otro borde, perfectamente redondo, y de cinco codos de altura, en tanto que un cordón de treinta codos medía la circunferencia.* (I Reyes, 7,23), de acuerdo con esto el valor de $\pi = 3$, dado que

$$\pi = \frac{Perímetro\ de\ la\ circunferencia}{diametro} = \frac{30\ codos}{10\ codos} = 3\ codos$$

Por otra parte, en Egipto también se hace presente el número π, por ejemplo en el Papiro de Ahmes, conocido también como Papiro Rhind. Allí se presentan 87 problemas que involucran aritmética básica, fracciones, cálculo de áreas y volúmenes, entre otros. Específicamente se tiene que el enunciado del problema 50 es "*Un campo circular tiene un diámetro de 9 khet (1 khet $\approx$ 50 m). ¿Cuál es su área?"* y en su solución presenta que el área es $\frac{64}{81} \cdot d^2$; como el valor del diametro es 9 se obtiene que el área del campo es igual a 64.

Analizando esta información y con el uso de la notación actual se tiene que

$$\text{Área del circulo} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{81}{4}\right)$$

donde r es el radio y d el diámetro.

Igualando el resultado de la expresión anterior con valor del área del papiro, se tiene que

$$\pi \cdot \left(\frac{81}{4}\right) = 64$$

Luego

$$\pi \approx \frac{256}{81}$$

Luego en Grecia, específicamente el trabajo de Arquímedes con el uso de procedimientos geométricos inscribe y circunscribe un polígono de 96 lados en una circunfernecia y determina que el número π está "encerrado" por el valor del perímetro del polígono inscrito y circunscrito, que se resume en la siguiente expresión:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Más adelante es Ptolomeo utilizando una circunferencia de radio 60 unidades y un polígono de 720 lados, determina que π es

$$\frac{377}{120}$$

En resumen se tiene que las aproximaciones presentadas del número pi son:

Biblia	3
Egipcios	$\frac{256}{81}$
Arquímedes	$\frac{223}{71}$ y $\frac{22}{7}$
Ptolomeo	$\frac{377}{120}$

Teniendo en cuenta la información presentada

i. Organizar las aproximaciones presentadas de menor a mayor.

ii. ¿Cuál considera usted que es la mejor aproximación de π. Justificar la respuesta.

iii. ¿En qué situaciones de la vida real considera usted que está presente el número pi?

En la actualidad se puede encontrar en la web que el mayor número de cifras decimales que se han determinado de π es diez billones, por lo que no es difícil encontrar en las fuentes de información que el número π es:

$$3,1415926535...$$

iv. Consulte de manera autónoma aspectos relevantes relacionados con el número π.

Finalmente, *el número π es un número irracional por lo que no puede expresarse como el cociente entre dos números enteros.*

B.2. Actividad 1

1. Dados los dos segmenos, determinar la razón a la que están.

2. Si en un tubo de vidrio de 3 metros de longitud, se ubica en uno de los extremos ácido clorihídrico HCl y en el otro amoníaco NH_3 , a qué distancia de los extremos se forma el anillo de cloruro de amonio NH_4Cl.

3. Expresar cada número racional como decimal o el número decimal como racional en la siguiente tabla según corresponda.

$\frac{1}{2} =$
$\frac{1}{3} =$
$\frac{7}{4} =$
$0,34 =$
$12,456 =$
$0,\overline{32} =$
$2,\overline{21} =$

4. Represente sobre la recta numérica los números

$$\frac{5}{7}; 0,\overline{6}; 0,3; -\frac{5}{2}$$

B.3. Actividad 2

1. Completar la información de la tabla.

Mes	Número de conejos		Mes	Número de conejos
1			11	
2			12	
3			13	
4			14	
5			15	
6			16	
7			17	
8			18	
9			19	
10			20	

2. Con ayuda de la calculadora, determinar el valor de los cocientes indicados, de acuerdo con la siguiente información

   - n_1 y n corresponden al número de conejos en dos meses consecutivos.
   - $n_1 > n$.

$n_1 \div n$	Resultado		$n_1 \div n$	Resultado
$2 \div 1$			$144 \div 89$	
$3 \div 2$			$233 \div 144$	
$5 \div 3$			$377 \div 233$	
$8 \div 5$			$610 \div 377$	
$13 \div 8$			$987 \div 610$	
$21 \div 13$			$1597 \div 987$	
$34 \div 21$			$2584 \div 1597$	
$55 \div 34$			$4181 \div 2584$	
$89 \div 55$			$6765 \div 4181$	

3. Con la calculadora determinar el valor de la expresión, ¿Existe alguna relación con los valores hallados en el numeral 2? Explique su respuesta.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

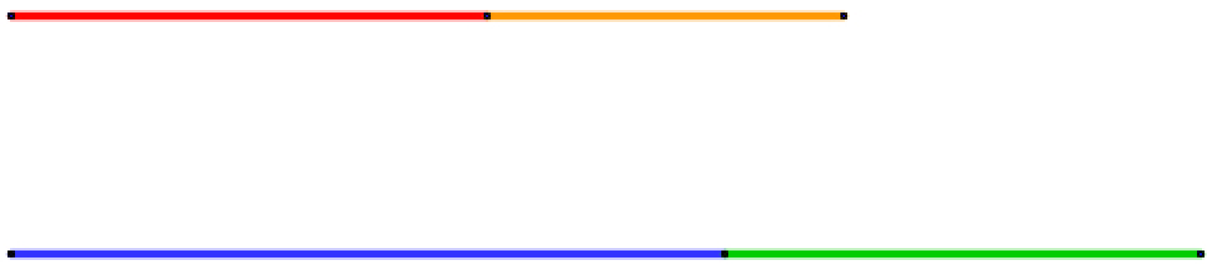
B.4. Actividad 3

1. Completar la información de la tabla de acuerdo con la división de la medida de la arista del cubo inicial de 8 cm.

Número de partes (arista)	Número de cubos	Medida arista	volumen de un cubo	volumen total	Área de una cara	Área superficial	$\frac{Volumen}{Superficie}$	Cociente
1	1	8	512	512	64	384	$\frac{512}{384} = \frac{4}{3}$	$1,\overline{3}$
2	8	4	64	512	16	768	$\frac{512}{768}$	$0,\overline{6}$
4	2							
8	1							
16	$\frac{1}{2}$							

B.5. Prueba de salida

1. En un experimento utilizando gases se determinaron por medio de la ley de Graham, las siguientes representaciones.

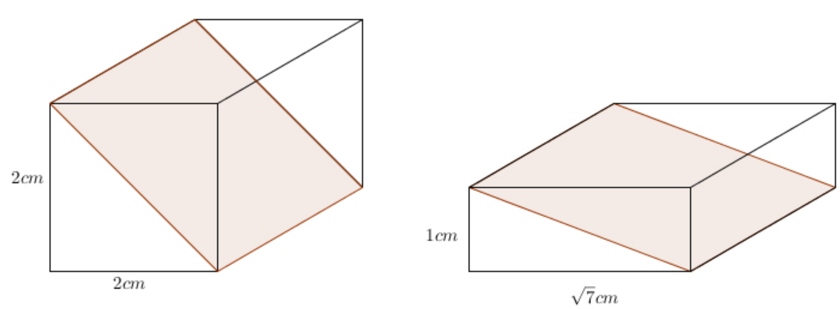


   - ¿Es correcto afirmar que las dos representaciones corresponden a la misma razón? justificar la respuesta.

2. Ubique los siguientes números en la recta numérica.

$$-\frac{4}{3}; \frac{3}{4}; \sqrt{10}; 0,\overline{1}\ ;\ -2,\overline{6}$$

3. En la imagen se presentan dos sólidos y la cara que se genera luego de realizar un corte que se representa con la región sombreada, ¿Es correcto afirmar que las áreas de las regiones sombreadas tienen el mismo valor?. Si la profundidad es la igual, justificar su respuesta.



4. Con ayuda de la calculadora determine la expansión decimal hasta las seis cifras decimales, del número $\sqrt{3}$.

Anexo: C

Elementos de una clase

Para el desarrollo de las clases de la unidad didáctica se plantea que éstas sigan la siguiente estructura:

1. Determinar el objetivo de trabajo.

2. Actividad inicial (situación que permite evidenciar si los estudiantes poseen los conceptos previos necesarios para abordar el tema.

3. Motivación inicial o relacion con la realidad: el docente puede hablar brevemente sobre un tema del interés de los estudiantes en el que sea aplicable el concepto que quiere trabajar, presentar un video corto, etc. que le permita captar la atención de sus estudiantes.

4. Presentación del tema de trabajo en clase. Dependiendo de la intención (objetivo) que se tenga con la actividad, los estudiantes pueden tener diferentes tipos de interacción:

   - Trabajo individual: aplicación de actividades.
   - Trabajo en grupo: denominado trabajo cooperativo.
   - Puesta en común: socialización de resultados, establecimiento de acuerdos.

5. Espacios de evaluación.

   - Evaluación por parte del docente.
   - Evaluación por pares.
   - Autoevaluación.

   El profesor diseñará y establecerá la manera en la que los estudiantes que no alcancen desempeño básico logren superar las dificultades que se presenten.

6. Aplicación de materiales y recursos. El profesor consultará e incorporará en su planeación de clases recursos con los que sea posible mejorar la comprensión del concepto o diseñará los que vea convenientes.

7. Registro de observaciones (opcional)
   Si el profesor tiene como propósito la recolección de datos, bien sea como insumo para el desarrollo de próximas sesiones o con motivo de una indagación, creará instrumentos que le permitan recolectar información relevante: diario del docente (registro del alcance o no de los criterios de logro, de los errores en los que incurren los estudiantes o acciones que el docente tenga que improvisar durante la sesión) y diario del estudiante (registro de la motivación del estudiante, de su percepción de la comprensión del concepto y de la actividad propuesta).

Bibliografía

[1] Barbolla, R. et al (1981). *Introducción al análisis real.* Madrid: Ed Alhambra.

[2] Bergé A. y Sessa C. (2003). *Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos.* Aportes a una investigación didáctica, Bogotá. Revista. Relime, Vol.6, No.3.

[3] Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas.* Madrid: Alianza Editorial.

[4] Campos, A. (2006). *Introducción a la filosofía y a la historia de la matemática.* Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

[5] Campos, A. (2013). *Epistemología de la matemática.* Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

[6] Cañadas, M.; Gómez, P. (2014). *Apuntes sobre análisis de contenido.* Módulo 2 de MAD 3.Documento no publicado (Documentación). Bogotá: Universidad de los Andes.

[7] Castro, I. (2004). *Razonamiento griego con regla y compás.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[8] Castro, I. (1994). *Temas de Teoría de Cuerpos, Teoría de Anillos y Números Algebraicos.* Vol III. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

[9] Coll, C. y Solé, I. (1989). *Aprendizaje significativo y ayuda pedagógica.* Cuadernos de pedagogía recuperado el 25 de mayo 2015 de `http://www.quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_38/nr_398/a_5480/5480.htm`

[10] Coriat, M y Scaglia, S. (2000). *Representación de los números reales en la recta.* Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas 2000 Volumen 18 No. 1

[11] Courant, R., y John, F. (2003). *Introducción al cálculo y al análisis matemático.* México: Editorial Limusa.

[12] D'Amore, B. Godino, J. y Fandiño, M. (2008). *Competencias y matemática.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

[13] D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática* . Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, Universidad de Bologna (Italia).

[14] Dueñas, H. y Rubio, M. (2006). *Cálculo I.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias.

[15] Escalante, F. (2003). *Construcción Geométrica de Números.* Lima: Editorial Hozlo S.R.L.

[16] Escamilla, A. (1993). *Unidades didácticas: una propuesta para el trabajo en el aula.* Zaragoza: Edelvives.

[17] Ferreira, J. (2010). *A construção dos números.* Rio de Janeiro: Sociedade brasileira de matemática.

[18] Godino, Juan D, (2003). *Investigaciones sobre fundamentos teóricos y metodológicos de la educación matemática.* Granada: Universidad de Granada,

[19] Gómez, B. (2010), *Concepciones escolares de los decimales.* Publicado en Revista de Investigación en Educación, No. 8, 2010, pp. 97-107

[20] Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

[21] Gómez, P. (2014). Editor académico y compilador, *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas en matemáticas en MAD 1.* Bogotá: Universidad de los Andes, Centro de Investigación y Formación en Educación, CIFE. Ediciones Uniandes.

[22] Giovaninni, E. (2013).*Completitud y continuidad en Fundamentos de la geometría de Hilbert* recuperado el 31 de agosto de 2016 `http://philsci-archive.pitt.edu/10192/1/7041.pdf`

[23] Hawking, S. (2007). *Dios creó los números. Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia.* Barcelona: Editorial Crítica.

[24] Lang, S. (1990). *Introducción al análisis matemático.* México: Addison-Wesley Iberoamericana S.A.

[25] Linés, E. (1991). *Principios de análisis matemático.* Barcelona. Editorial Reverté

[26] Ministerio de Educación Nacional. (2006), *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas-documento No.3*, Bogotá. Editado por MEN.

[27] Moise, E. y Downs, F. (1970). *Geometría Moderna* E.U.A Addison-Wesley Iberoamericana S.A.

[28] Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

[29] Ortega, J. (1993), *Introducción al análisis matemático.* Barcelona: Editorial Labor S.A

[30] Patiño, V. (2013). *Construcción de los números reales: completación de la estructura topológica.* Santiago de Cali, Universidad del Valle.

[31] Pellicer, M. L. (1994). *Las construcciones de los números reales. History of Mathematics in the XIXth Century*, Recuperado el 28 de mayo de `http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/HISTORIADELAMATEMATICA_1994_00_00_01.pdf`.

[32] Pérez, J, et Al. (2005). *Cuatro Propuestas Didácticas en Matemáticas.* Bogotá: Universidad Sergio Arboleda

[33] Recalde, L. y Arbeláez, G. (2011). *Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica*. Santiago de Cali: Editorial Universidad del Valle

[34] Romero, I. (1995). *La introducción del número real en educación secundaria.* Granada (España). recuperado el 7 de septiembre de 2016 `http://funes.uniandes.edu.co/1766/2/Romero1995IntroduccionReal.pdf`

[35] Rico, L. (1997). *Los organizadores del currículo de matemáticas.* En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M. M. (Eds.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 39-59). Madrid: ice - Horsori. Recuperado el 20 de abril de 2016 `http://funes.uniandes.edu.co/522/1/RicoL97-2529.PDF`

[36] Rico, L. (1997). *Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria.* En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), La Educación Matemática en la enseñanza secundaria (pp. 15-38). Barcelona: ice - Horsori.

[37] Sanabria, G. (2005). *Los números reales según Cantor y Dedekind. Una Propuesta Didáctica*. Publicado en Rev. Digital Matemática, Educación e Internet del Instituto Tecnológico de Costa Rica, Vol.6, núm. 1

[38] Sánchez, C. (2009). *Construcción de los reales*

[39] Torres, A. (2006). *El método cartesiano y la geometría analítica*. Universidad del Valle. Recuperado el 11 de junio de 2015 `http://revistaerm.univalle.edu.co/menun/pdf.php?ano=2006&num=1&idioma=EN&id=36`

[40] Trejo, A. (1968). *El concepto de número*. Washington D.C: Departamento de asuntos científicos, Unión Panamericana, Secretaría General de la Organización de Estados Americanos